Funções e Aplicações

Ministrado por Bruno Tenório da S Lopes

Coordenado por Profa Dra Edna Maura Zuffi

Maio de 2011

Índice

Funções

Em matemática sempre temos interesse em saber como certas grandezas se relacionam entre si. Podemos estar interessados em saber, por exemplo, como a quantidade de pessoas de um determinado lugar se relaciona com o tempo, ou tipo de correspondência entre quantidades, como salário e horas de trabalho, receita e número de artigos vendidos, taxa de crescimento de um tecido canceroso e o efeito do tratamento radioativo ou quimioterápico. De fato, relações ocorrem em todos os ramos do conhecimento humano (Gerônimo e Franco, 2008). Veja, por exemplo, na figura a seguir, a representação gráfica do valor do salário mínimo brasileiro (em dólar) relacionado com o tempo, no período de 1994 a 2006 (em 1º de janeiro).

(Fonte: Dados obtidos em http://www.debit.com.br - acesso em 17/01/2006)

1 - Conjuntos Numéricos

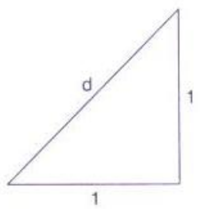
Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$

Números Irracionais: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ {números que não podem ser escritos na forma de frações}

Alguns Exemplos



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$, ... Note que, $\sqrt{1} = 1; \sqrt{4} = 2; \sqrt{9} = 3$ são números naturais e por isso não são incluídos no conjunto dos Irracionais. Existem infinitos números irracionais $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}$ ... $\sqrt[m]{x}, \sqrt[m]{x^n}$

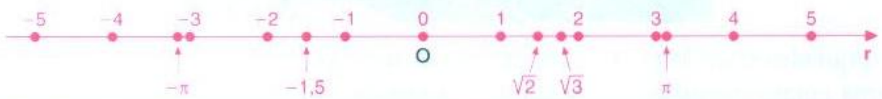
Números Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. Esse conjunto é representado pela reta real

A reta real

Qualquer número real, racional ou irracional, pode ser representado numa reta, a reta real. Para isso, basta:

- escolher um ponto sobre a reta que represente o zero ou a origem;
- estabelecer dois sentidos, um positivo e um negativo;
- escolher uma unidade de medida para graduar a reta.

A cada número real corresponde um único ponto de **r** e a cada ponto de **r** corresponde um único número real, chamado de **abscissa** desse ponto em **r**.



Essa correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{R}$ e os pontos de **r** é denominada **sistema de coordenadas**; a reta **r** é chamada de **reta real** ou de **eixo dos números reais**, e o ponto **O**, correspondente ao número zero, é a **origem** desse sistema.

Intervalos

Intervalos finitos

De maneira geral, sendo **a** e **b** números reais quaisquer, $a < b$, podemos ter:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ é o intervalo **fechado** de extremos **a** e **b**

notação: $[a, b]$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ é o intervalo **aberto** de extremos **a** e **b**

notação: $]a, b[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ é o intervalo **fechado** em **a** e **aberto** em **b**

notação: $[a, b[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ é o intervalo **aberto** em **a** e **fechado** em **b**

notação: $]a, b]$

Intervalos infinitos

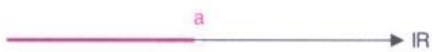
De modo geral, sendo **a** um número real qualquer, podemos ter:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\} = [a, +\infty[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\} =]-\infty, a]$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$



Observação: Podemos, também, considerar $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Operações entre conjuntos

O conjunto **intersecção** de **A** e de **B** (notação: $A \cap B$) é o conjunto formado pelos elementos **comuns** a **A** e a **B**.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

O conjunto **reunião** (ou **união**) de **A** e de **B** (notação: $A \cup B$) é o conjunto formado pelos elementos que **pertencem** a **A** ou a **B**.

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

O conjunto **diferença** entre **A** e **B** (notação: $A - B$) é o conjunto formado pelos elementos que **pertencem** a **A** e **não pertencem** a **B**.

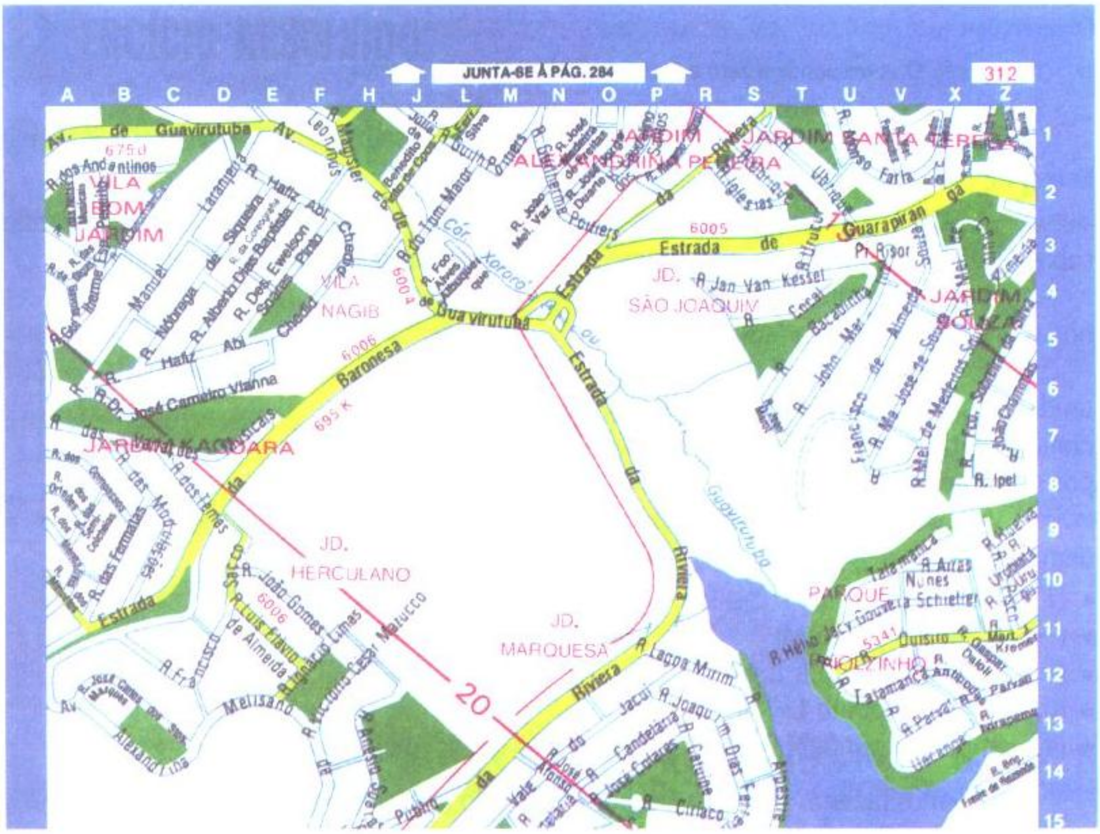
$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

Exercícios

1) Escreva com notação de intervalos cada conjunto

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6{,}3 < x < 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1{,}5 \leq x \leq \sqrt{2}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

2 - Sistema Cartesiano Ortogonal



A Matemática também faz uso de coordenadas (como **abscissas** e **ordenadas**), que serão vistas a seguir.

O eixo desenhado na posição horizontal é denominado **eixo das abscissas**, em geral indicado por **Ox**.

O eixo desenhado na posição vertical é denominado **eixo das ordenadas**, geralmente denotado por **Oy**.

α é chamado de **plano cartesiano ortogonal**.

1) O ponto **O** corresponde a zero e é chamado de **origem** do sistema.
2) Cada eixo é subdivido em segmentos de mesma medida (unidade)

Par ordenado

Entendemos por par ordenado uma sequência ordenada de dois elementos, sendo:

(a, b) = (c, d) ⇔ a = c e b = d

Cada par ordenado (x, y) representa um ponto no Sistema Cartesiano, por exemplo:

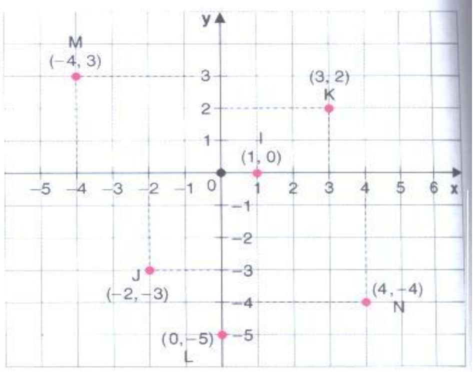
Para localizar um ponto **K** no **sistema de eixos**, devemos nos imaginar andando sobre os eixos a partir da origem, primeiro horizontalmente e depois verticalmente.

Observe alguns pontos localizados no sistema cartesiano ao lado.

Obtemos o ponto **K** caminhando três unidades para a direita e duas unidades para cima, a partir do ponto **O**. Representamos **K** por suas **coordenadas** (3, 2).

Veja, então, as coordenadas dos demais pontos:

- (1, 0) para o ponto **I**;
- (−4, 3) para o ponto **M**;
- (−2, −3) para o ponto **J**;
- (0, −5) para o ponto **L**;
- (4, −4) para o ponto **N**.



Podemos fazer as localizações porque, fixado o referencial cartesiano, associamos a cada ponto do plano uma única dupla de números reais e a cada dupla de números reais, um único ponto do plano. É essa correspondência que determina um **sistema de coordenadas cartesianas**.

3 – Funções

Uma **função** é uma associação a qual, para cada elemento *x* em um conjunto A, faz corresponder exatamente um elemento chamado f(x), em um conjunto B

$f : A \to B$ lê-se: **f é uma função de A em B.**

Ou: $y = f(x)$ lê-se: y é uma função de x, com x ϵ A e y ϵ B

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Ao considerarmos uma função $f : A \to B$, temos que

D(*f*) = A lê-se: **o domínio da função *f* é igual ao conjunto A**

CD(*f*) = B lê-se: **o contradomínio da função *f* é igual ao conjunto B**

Im(*f*) $\subset$ **B** lê-se: **o conjunto imagem da função *f* está contido no contradomínio B:**

O *conjunto imagem* é formado por todos os elementos y de B, que pela função *f* são associados a algum x em A.

É muito proveitoso considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2). Se *x* estiver no domínio da função *f*, quando *x* entrar na máquina, ele será aceito como *input*, e a máquina produzirá um *output* *f*(x) de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todos os *inputs*, enquanto a imagem como o conjunto de todos os *outputs* possíveis.

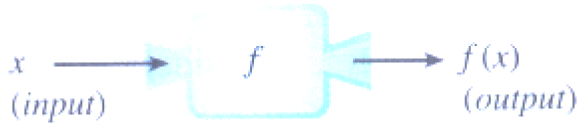
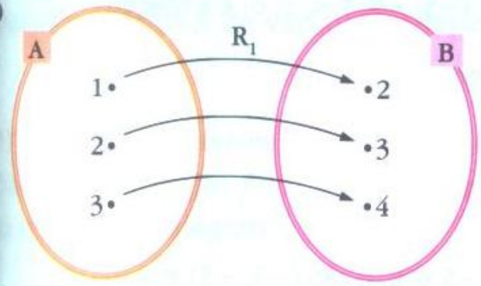


FIGURA 2
Diagrama de máquina para uma função f

Funções representadas por diagrama de flechas

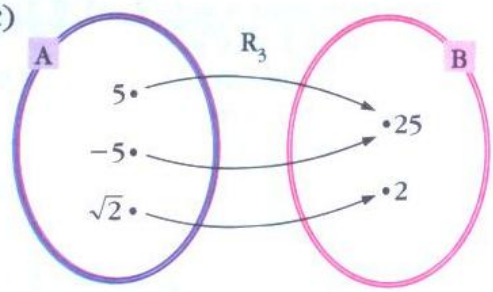
Exemplo:
Vamos considerar algumas relações representadas pelos diagramas de flechas e ver quais delas representam uma função:

a)



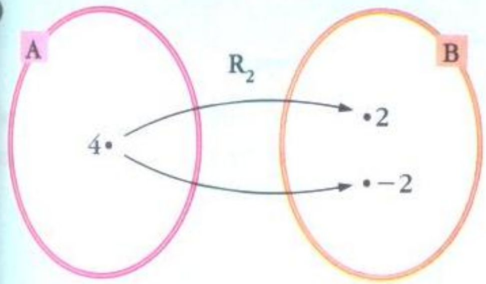
R_1 é função de A em B, pois a cada elemento do conjunto A corresponde um único elemento do conjunto B.

c)



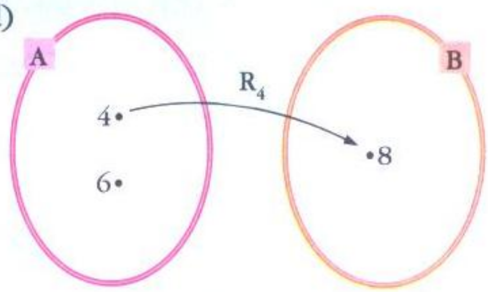
R_3 é função de A em B, pois a cada elemento do conjunto A corresponde um único elemento do conjunto B.

b)



R_2 não é uma função de A em B, pois o elemento 4 do conjunto A possui dois correspondentes em B (2 e -2).

d)



R_4 não é uma função de A em B, pois o elemento 6 do conjunto A não possui correspondente no conjunto B.

Considere a função f(x) = $2x^2$ + 1, temos:

f(1) = 2 • $(1)^2$ + 1 = 2 • 1 + 2 = 3 (a imagem de 1 pela função f é f(1) = 3)

f(-2) = 2 • $(-2)^2$ + 1 = 2 • 4 + 1 = 9 (a imagem de -2 pela função f é f(-2) = 9

Como *x* representa qualquer elemento do domínio da função, o seu valor varia. Como para cada elemento x do domínio há uma imagem y no contradomínio, o valor de y também varia, e varia na dependência de x.

Daí, em geral, chamamos ***x*** de **variável dependente** e ***y*** de **variável dependente.**

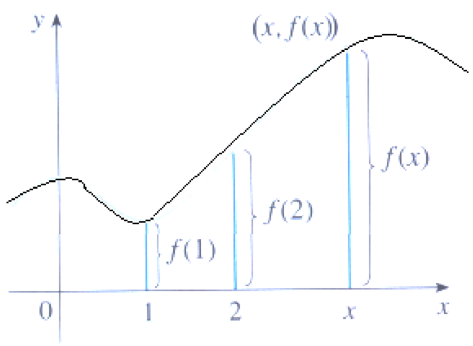
Mas podemos usar quaisquer notações similares para representar uma função. Por exemplo, na Física, é usual utilizarmos as leis que representam a variação do *espaço em função do tempo*, sendo *s* a variável espacial (dependente) e *t* o tempo (independente):

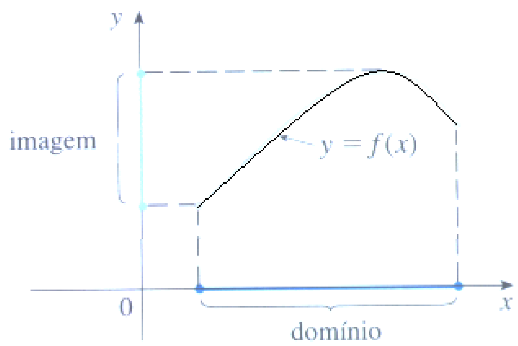
$s(t) = 1 + 5t$ (movimento uniforme) ou $s(t) = 2t^2 + 3t - 1$ (movimento uniformemente variado)

Gráfico de funções

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se *f* for uma função com domínio A, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$





Representação de funções

É possível representar uma função de quatro maneiras

- verbalmente (descrevendo com palavras a regra de associação da função)
- numericamente (por meio de tabelas de valores)
- visualmente (através de gráficos)

- algebricamente (utilizando uma fórmula explícita)

Exemplo

A mais útil dentre as representação da área de um círculo em função de seu raio é a fórmula $A(r) = \pi r^2$, apesar de ser possível elaborar uma tabela de valores, bem como o gráfico (meia parábola).

O custo C de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso *w*. Embora não haja uma fórmula simples conectando *w* e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando é dado *w.*

Aproveite e faça os gráficos desta função acima e das anteriores: $s(t) = 1 + 5t$ e $s(t) = 2t^2 + 3t - 1$

Exercícios

1) Luiz e Marcelo estavam realizando um jogo. Marcelo dizia um número e Luiz respondia outro usando uma regra que só ele conhecia. O desafio de Marcelo era descobrir qual a regra que Luiz estava usando. Para poder se organizar melhor Marcelo fez a tabela abaixo:

Número que eu falei	Número respondido por Luiz
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

a) Você é capaz de descobrir qual era a regra utilizada por Luiz?
b) A regra utilizada por Luiz é uma função?
c) Chamem de x os números ditos por Marcelo e de y os respondidos por Luiz. Escreva uma lei que dê y em função de x.
d) Quais podem ser domínio e imagem dessa função
e) Faça o gráfico dessa função
f) Diga quais tipos de representação de funções foi utilizada nesse jogo.

2)

Veja, dez. 1996.

a) Do que trata o gráfico?

b) Em que ano o consumo foi de 950 milhões de litros?

c) De quanto aumentou o consumo entre 1993 e 1994?

d) O que significa o número 1,6 bilhão?

e) Segundo o gráfico, a evolução do consumo de suco de laranja é função de que grandeza?

f) Além do tempo, do que mais pode depender a evolução do consumo de suco?

Observe o gráfico:

3)

Veja, ago. 1996.

a) Qual é a função representada no gráfico?

b) Por que o título do gráfico é "A briga pelo mundo"?

c) Qual é o país onde a Pepsi é mais consumida? E a Coca-Cola?

d) Qual é a porcentagem de consumo de cada refrigerante no Brasil?

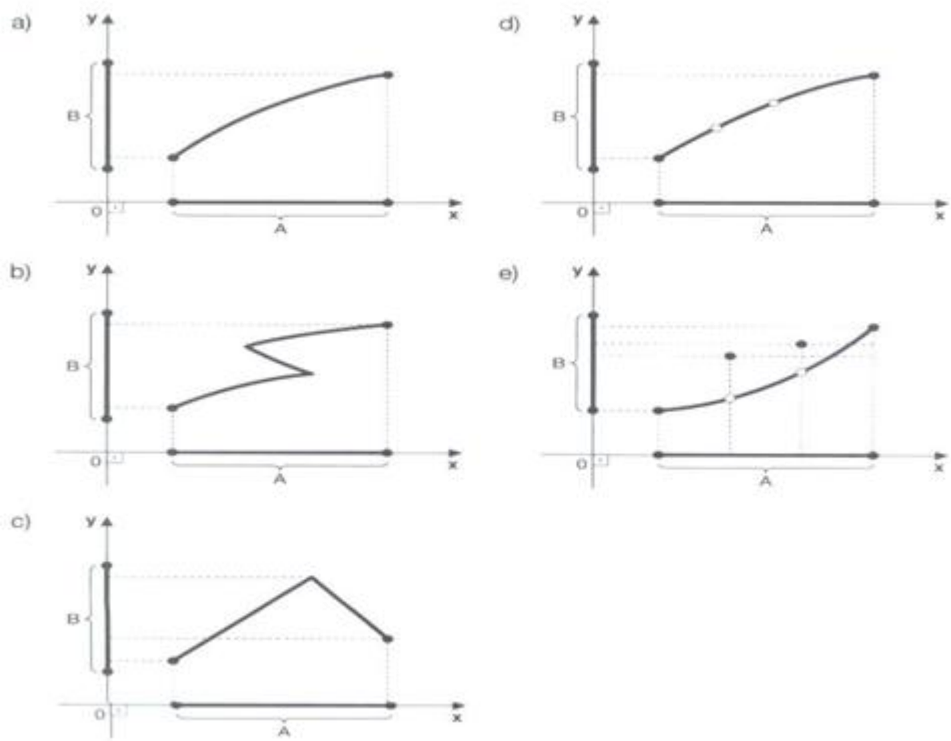
e) Se somamos as porcentagens de consumo de Pepsi e Coca-Cola no Brasil, por que não atingimos 100%?

f) Do que pode depender o consumo dos refrigerantes em cada país?

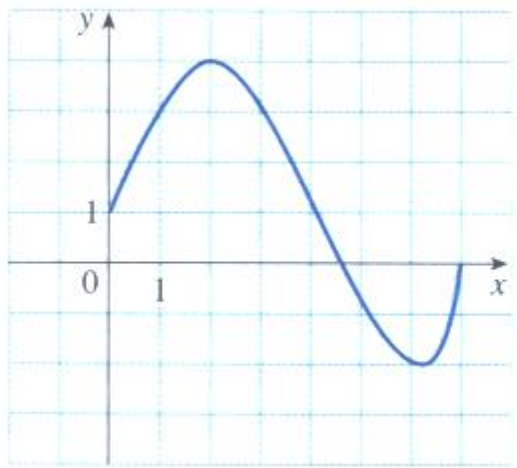
4) Observe a tabela seguinte de desconto de Imposto de Renda (IR) correspondente ao mês de agosto de 1997 e construa um gráfico que represente a variação do Imposto de Renda a pagar em função do salário.

Tabela do IR		
Renda em agosto em R$	Alíquota %	Deduzir – R$
Até 900	Isento	---
Acima de 900 até 1800	15	135
Acima de 1800	25	315

5) Os gráficos abaixo representam funções y = *f*(x)? Em cada caso afirmativo, diga qual o domínio, contra-domínio e imagem.



6) Encontre os valores de *f(1) e f(5)*, o domínio e a imagem de *f.*



Domínio de uma função real

Consideremos que o domínio de uma *função f*, *D(f)*, salvo indicação em contrário, é o subconjunto de ℝ, formado por todos os valores de *x* para os quais as operações indicadas nas expressões que definem *f* são possíveis, resultando um número real.

Tal função, na qual o domínio é um subconjunto de ℝ, é chamada de ***função real***.

É possível determinar o domínio de uma função real, conhecendo apenas a lei de correspondência entre seus elementos. Veja alguns casos notáveis:

1º caso: Quando variável aparece no denominador de uma função.

Condição: o denominador de uma fração deve ser diferente de zero

2º caso: Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par.

Condição: o radicando de um radical de índice par deve ser um número maior ou igual a zero (positivo ou nulo)

3º caso: Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par e esse radical está no denominador de uma fração

Condição: Esse é a reunião dos dois casos anteriores; logo, o radicando deve ser **estritamente** maior do que zero

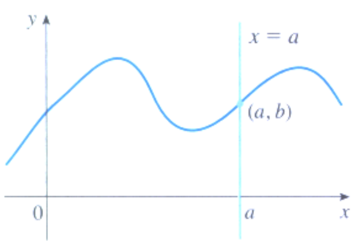
Exercícios

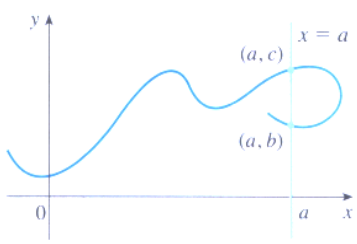
1) Determinar o domínio das seguintes funções

a) *f(x)* = x^3 + x
b) *f(x)* = $\frac{2x-1}{3x+4}$
c) *f(x)* = $\sqrt{-3x+15}$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

Teste da reta vertical

Uma curva no plano xy é gráfico de uma função de x, **y = f(x)** se e somente se nenhuma reta vertical corta a curva **mais de uma vez**





Observação: se estivéssemos olhando uma função *x = f(y),* então teríamos que ver o teste com uma reta horizontal.

Exemplo

A parábola x = y^2-2 não é uma função de x (figura abaixo), mas se invertemos os papéis de x e y, então x = h(y) = y^2-2, define x como uma função de y.

Volte ao exercício 5 anterior. Você é capaz de dizer quais desses gráficos também poderiam representar funções x = *f(y)?*

Função definidas por partes

Logo no início dessa apostila, foi apresentado um gráfico do valor do salário mínimo brasileiro (em dólar) relacionado com o tempo, no período de 1994 a 2006. No que gráfico define uma função (por quê?), porém não há uma fórmula única que associe qualquer elemento *x* do domínio seu correspondente *y = f(x)* no gráfico. Entretanto, se dividirmos o domínio em intervalos menores, de modo a ser possível produzir uma lei para cada intervalo do domínio, teremos uma função definida por partes, ou seja, uma função que possui uma equação para cada trecho de seu domínio.

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^{2,} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Função valor absoluto ou função módulo

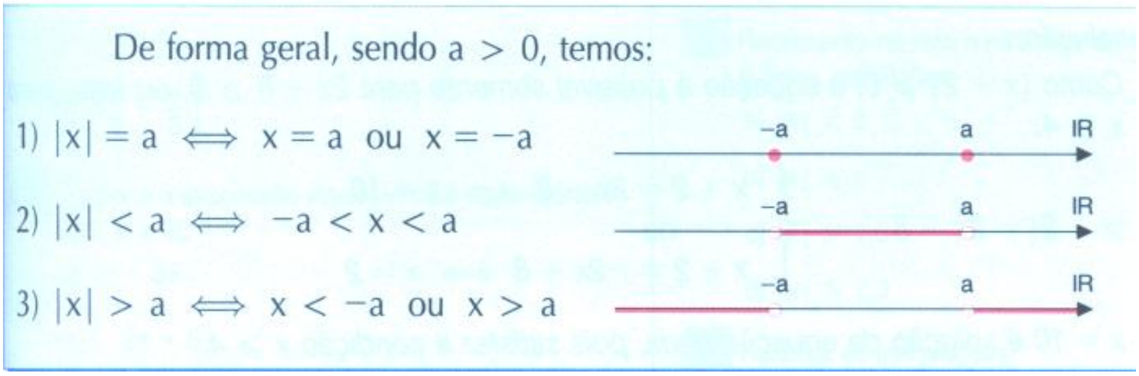
O **valor absoluto** ou **módulo de um número *a***, denotado por $|a|$, é a distância de *a* até 0, sobre o eixo real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos:

$\|a\| \geq 0$, para todo número *a*

Dessa forma,

Módulo de um número real **x**, |x|, é sempre não-negativo, ou seja, é o oposto de x, se **x** é negativo

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



De forma geral, sendo $a > 0$, temos:

1) $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$

2) $|x| < a \iff -a < x < a$

3) $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$

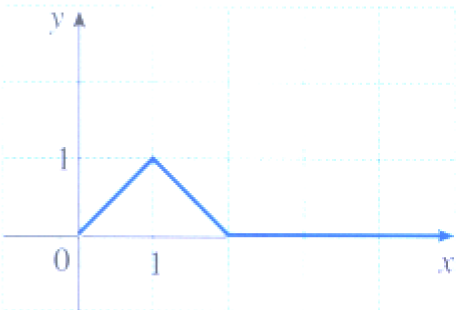
Exercícios

1) Esboce os gráficos de:

a) f(x) = |x| e f(x) = |2x + 1|

b) $f(x) = \begin{cases} 7x, \text{ se } x < 0 \\ 25, \text{ se } x = 0 \\ x^3, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

2) Encontre uma fórmula para a função *f* cujo o gráfico está na figura abaixo

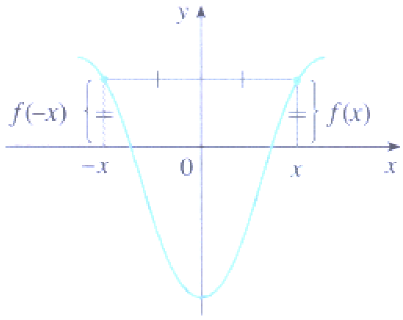


Simetrias

Se uma função satisfizer *f(-x) = f(x)* para todo *x* em seu domínio, então *f* é chamada de **função par**. Por exemplo, a função *f(x)* = x^2 é par, pois

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

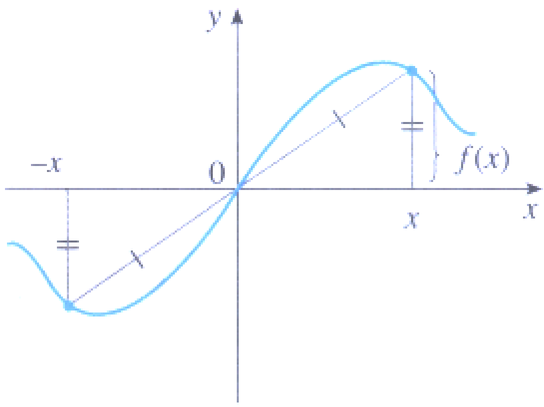
O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico seja simétrico em relação ao eixo *y* (figura abaixo). Isso significa que se fizermos o gráfico de *f* para *x ≥ 0*, então para obter o gráfico inteiro, basta refletir o que temos em torno do eixo y.



Se *f* satisfazer *f(-x) = -f(x)* para todo x em seu domínio, então f é chamada de **função ímpar**. Por exemplo, a função *f(x)* = x^3

f(-x) = $(-x)^3$ = $-x^3$ = - f(x)

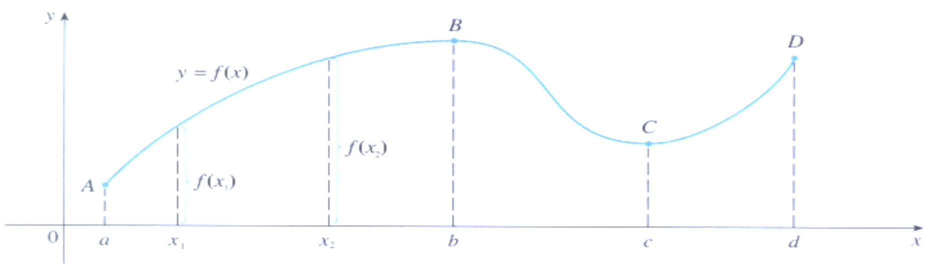
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (figura abaixo). Se tivermos o gráfico de *f* para *x ≥ 0*, poderemos obter o restante do gráfico girando em 180º, o que já temos, em torno da origem.



Note que, a maioria dos gráficos de funções que vimos até agora não são simétricos.

Funções crescentes e decrescentes

Observe a figura abaixo, o que você é capaz de dizer sobre o comportamento da função y =f(x) durante o intervalo [a, d]. E durante os intervalos [a, b], [b, c]. [c, d]. Ela é uma função definida por partes?



Uma função *f* chamada **crescente** em um intervalo ***I*** se

$f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***

Ela é denominada **decrescente** *em* ***I*** se

$f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***

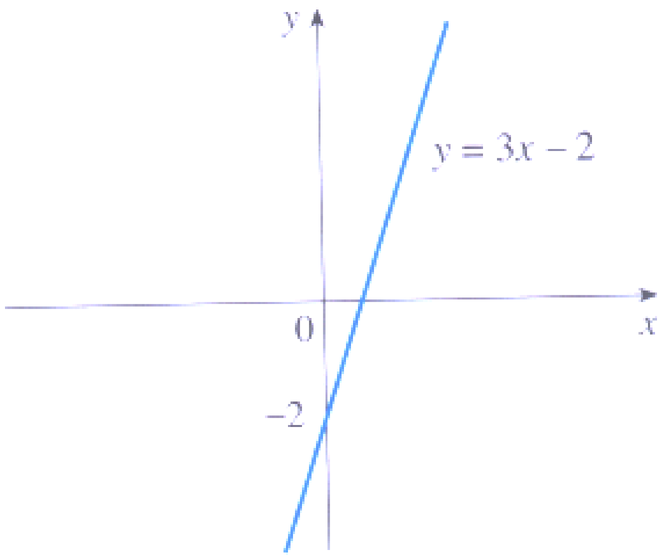
Na definição de função crescente acima é importante compreender que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ deve satisfazer para *todo* par de números x_1, x_2 em ***I*** com $x_1 < x_2$

Função linear

O gráfico de uma função linear é uma reta; assim podemos usar a forma inclinação-intercepto da equação da reta para escrever uma função linear, ou seja:

$y = f(x) = mx + b$

onde *m* é o coeficiente angular da reta (ou seja, a fornece a sua inclinação) e *b* é o intercepto no eixo y



x	*f(x)*
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	1.15

Exercícios

1) A medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria *com taxa constante*. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10 °C. Sabendo isso:

a) Faça uma tabela com as informações do exercício.

b) Expresse a temperatura T (em °C) como uma função de altura h (em km) supondo que uma função linear apropriada. O que representa a inclinação?

c) Qual a temperatura a 2,5 km de altura?

2) A tabela abaixo fornece uma lista de níveis de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa (EUA), de 1980 a 2000. Use esses dados para encontrar um modelo matemático (uma função) para representar o nível de dióxido de carbono.

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7
1982	341,1
1984	344,4
1986	347,2
1988	351,5
1990	354,2
1992	356,4
1994	358,9
1996	364,6
1998	366,6
2000	369,4

Função Polinomial

Uma função $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é chamada ***polinomial.***

Para isto, *n* deve ser um inteiro não-negativo, e os números a_0, a_1, a_2, . . ., a_n são constantes chamadas coeficientes do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R}$. Se o coeficiente de $a_n \neq 0$, então **o grau polinômio é *n*.** Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

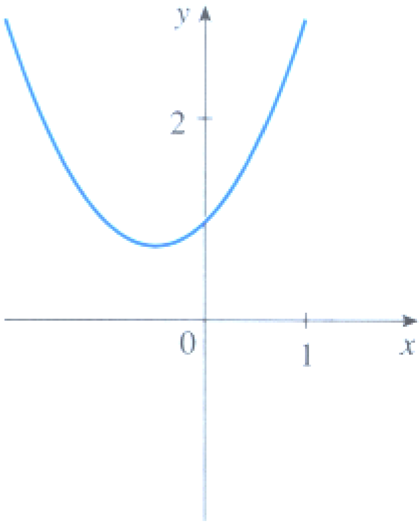
é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma P(x) = mx + b, e como já vimos, é uma reta.

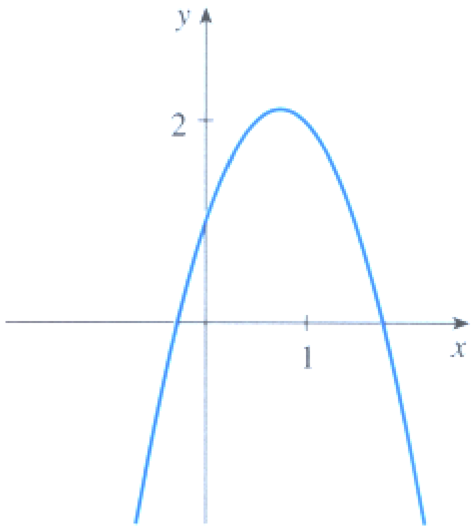
Função do 2º grau

Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado função **quadrática** ou do **2º grau**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$.

Se a >0 a parábola abre para cima (concavidade voltada para cima) e se a < 0 ela abre para baixo (concavidade voltada para baixo). Veja a figura abaixo.



(a) $y = x^2 + x + 1$



(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Pontos importantes do gráfico de uma função do 2º grau

Raízes da função do 2º grau

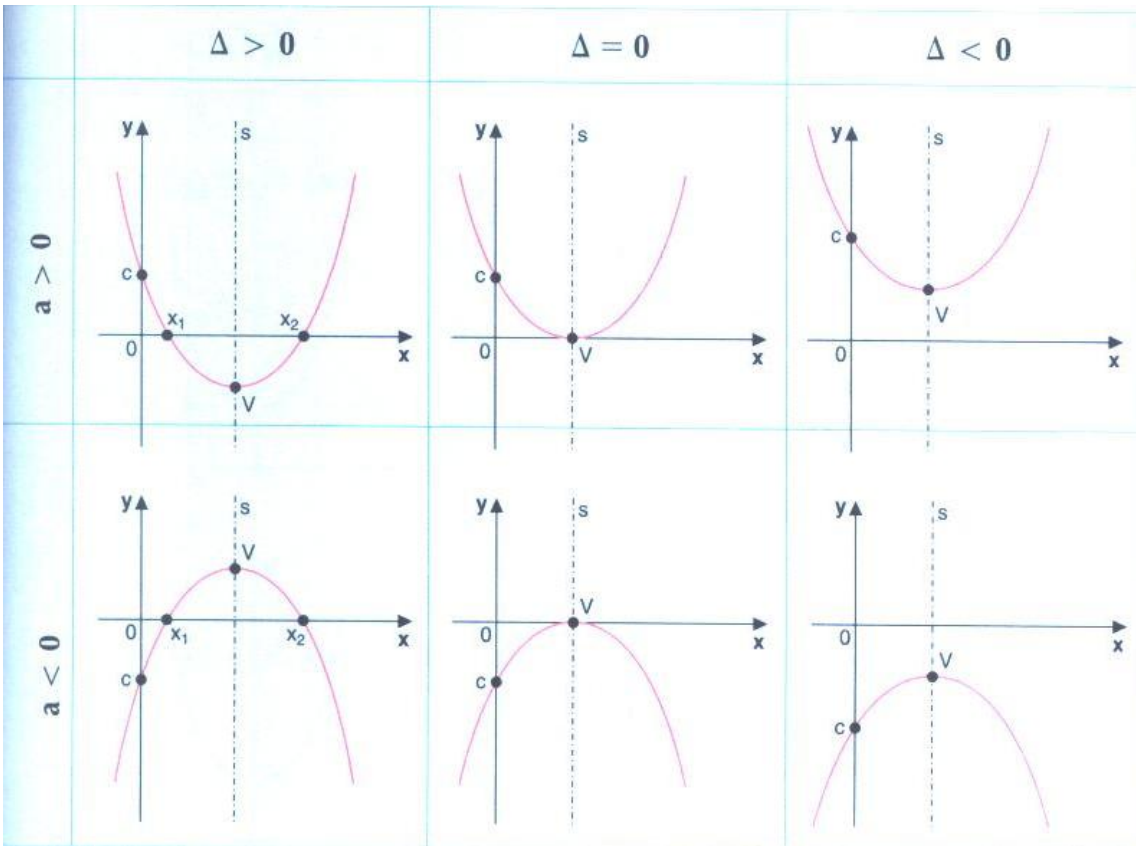
Você deve se lembrar, da 8ª série do 1º grau, que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida utilizando a fórmula conhecida no Brasil como *fórmula de Baskara*:

$X = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Podem, então, acontecer três casos:

- $\Delta > 0$: nesse caso a, equação tem duas raízes reais e a parábola intercepta o eixo **x** em dois pontos.
- $\Delta = 0$: nesse caso, a equação tem uma raiz real e a parábola intercepta o eixo **x** em apenas um ponto.
- $\Delta < 0$: nesse caso, a equação não tem raiz real e a parábola não intercepta o eixo **x**

Dessa forma, podemos organizar o seguinte quadro



Vértices da parábola

O **vértice** da parábola do gráfico de uma função do 2º grau (**V**) é outro ponto muito importante porque, conhecida sua abscissa x_v, podemos construir a parábola determinando um ponto com abscissa maior que x_v e um ponto com abscissa menor que x_v.

Para y = c em $y = ax^2 + bx + c$, temos $c = ax^2 + bx + c \rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$

Como $(-\frac{b}{a}, c)$ e (0, c) são equidistantes do eixo de simetria, todos os pontos deste tem abscissa igual a metade de $-\frac{b}{a}$ ou seja $x_v = -\frac{b}{2a}$ e a ordenada y_v é a imagem de x_v pela função.

$$y_v = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c \rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto

O vértice da parábola é dado por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

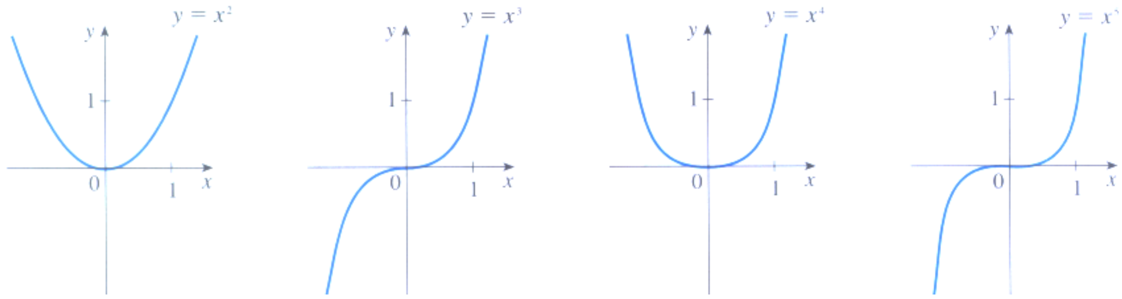
Funções potências

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é constante, é chamado de **função potência**

Vamos considerar alguns casos.

1) a = n onde n é um inteiro positivo

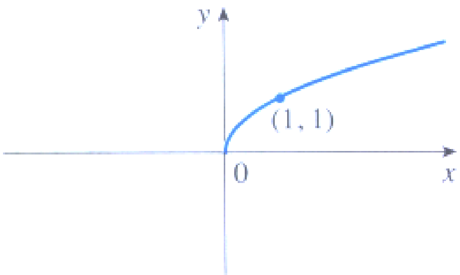
Os gráficos de *f(x) = x^n para n = 2, 3, 4 e 5 e estão na figura abaixo. Esses são polinômios com um só termo. Para n = 1 e n = 2, já conhecíamos os gráfico que são y = x (reta passando pela origem) e y = x^2 (parábola passando pela origem).*



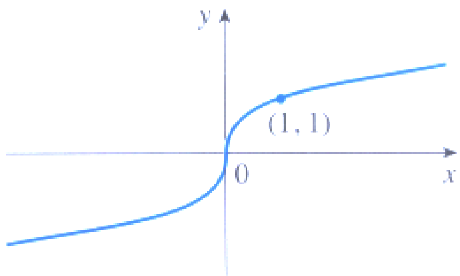
A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende se n é par ou impar. Se n é par, então o gráfico $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico será similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for impar, então $f(x) = x^n$ será uma função impar e seu gráfico é similar ao de $y = x^3$.

2) **a = $\frac{1}{n}$, onde n é um inteiro positivo**

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz.** Para n = 2 é a função raiz quadrada *f(x) = $\sqrt{x}$, cujo domínio é x ≥ 0 e o gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$. Para n = 3, temos a função raiz cúbica f(x) = $\sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se todo número real tem uma raiz cúbica).*



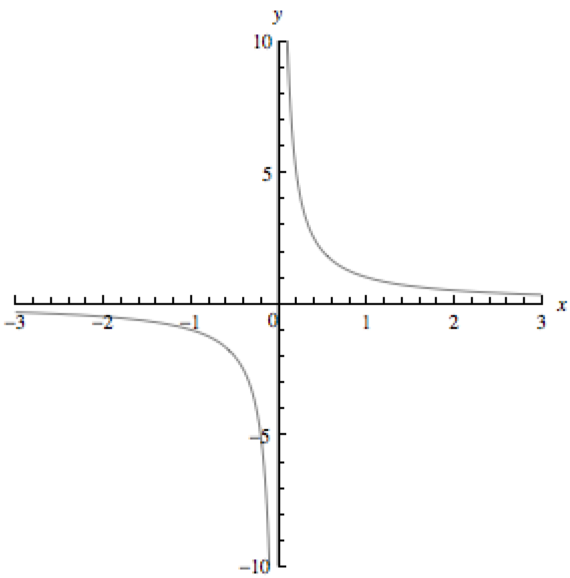
(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3) ***a = -1***

O gráfico da função $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

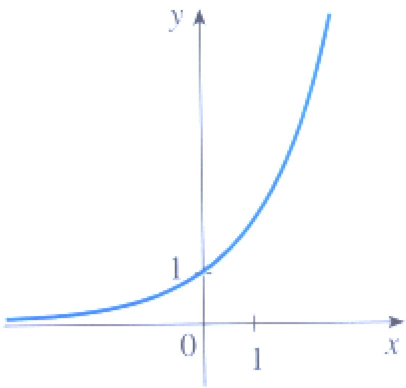


Funções exponenciais

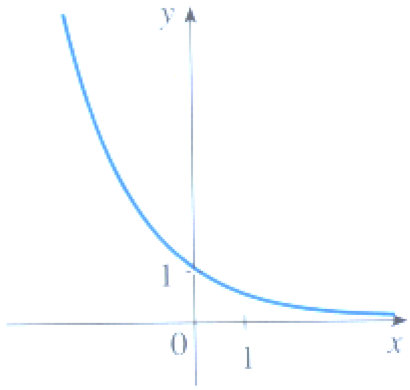
Lembre-se das leis dos expoentes

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = a^x$, onde a base *a é uma constante positiva e diferente de 1. Os gráficos de* $y = 2^x$ *e* $y = (0,5)^x$ *estão na figura abaixo. Em ambos os casos o domínio é* $\mathbb{R}$ *e a imagem = é* $y \geq 0$

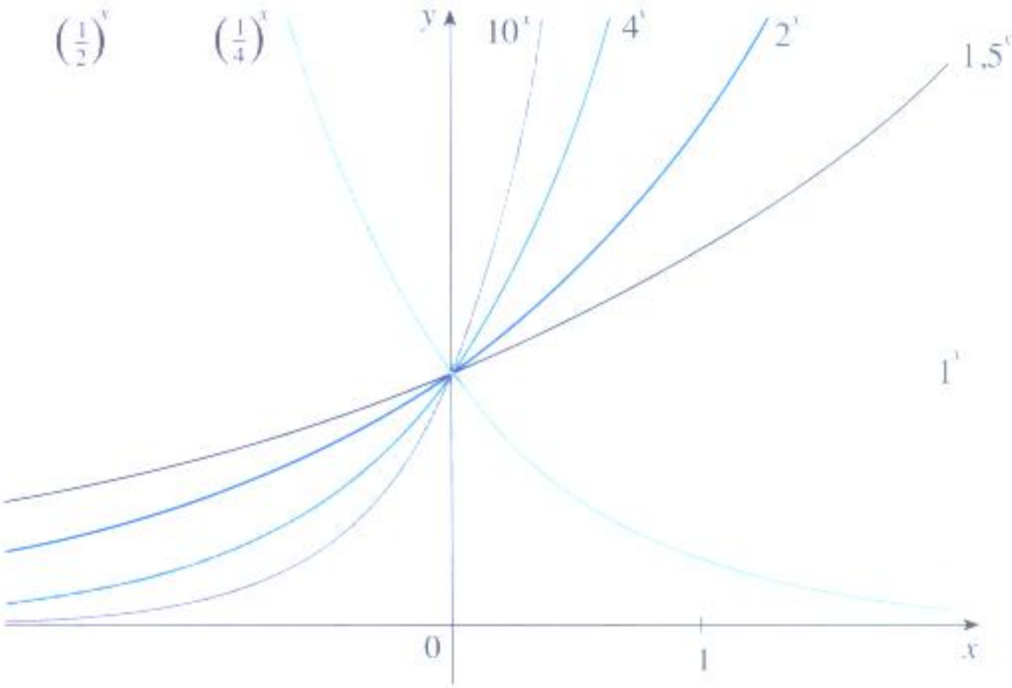


(a) $y = 2^x$

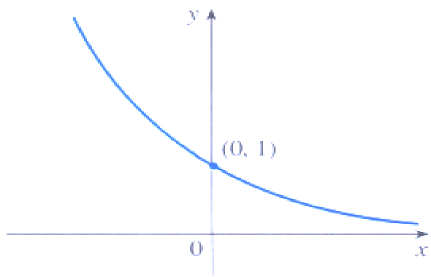


(b) $y = (0{,}5)^x$

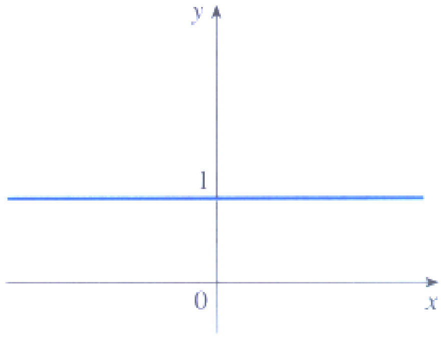
Gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$



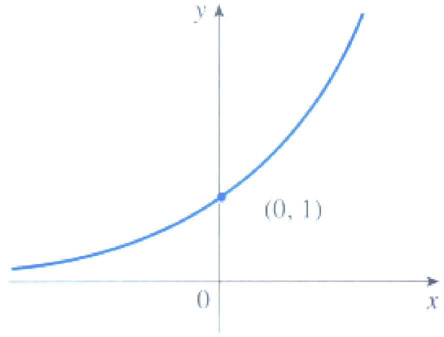
Observe os comportamentos dos gráficos para diferentes valores de a



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$



(b) $y = 1^x$



(c) $y = a^x, a > 1$

As funções exponenciais são uteis para modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (a >0) e decaimento radioativo (a < 0).

Note que o gráfico (b) é um gráfico de uma função constante, *f(x) = 1 para* $\forall x \in \mathbb{R}$, por isso não considerado uma função exponencial.

Exercícios

1) A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) é dada pela função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Esboce o gráfico dessa função.

b) O que representa nesse gráfico a inclinação e o intercepto F?

2) Biólogos notaram que a taxa de cantos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser linear. Um grilo canta 113 vezes por minuto a 70° F e 173 por minuto a 80° F.

a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função do número de cantos por minuto N.

b) Qual é a inclinação desse gráfico? O que ela representa?

c) Se os grilos estiverem cantando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

3) A população de um país era estimada em 50 milhões de habitantes em janeiro de 1991. Estima-se que a cada ano a população cresce 2% em relação ao ano anterior.

a) Qual era a população em janeiro de 1992. E em janeiro de 1994?

b) Observe os resultados anteriores e escreva a função que associa o número de habitantes desse país e os anos.

c) Em quantos anos, a partir de 1991, a população terá ultrapassado 60 milhões e em quantos anos ela terá dobrado?

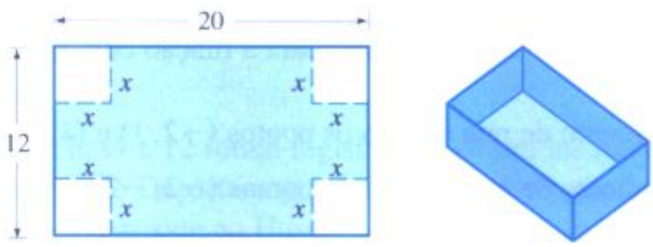
4) (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por esse indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão Q = 700 - $400e^{-0,5t}$, onde Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário em t meses de experiência (e $\approx 2,718$)

a) De acordo com a expressão, quantas peças um funcionário com dois meses de experiência deverá produzir mensalmente?

b) E um funcionário, sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare este resultado com o resultado do item *a*. Há coerência entre eles?

5) Um grupo de estudantes observa uma cultura de bactérias. A cada cinco horas a quantidade de bactérias triplica. O número de bactérias 15 horas após a primeira observação era de 8100. Qual a quantidade inicial de bactérias nesse experimento?

6) Uma caixa sem a tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 por 20 polegadas. Devem-se cortar os quadrados de lado x de cada canto e depois dobrar conforme a figura abaixo. Expresse o volume V da caixa como um função de x.



7) (Fuvest) Leia e faça o que se pede:

a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de *f*(x) = 2^x e *g*(x) = 2x.

b) Baseado nos gráficos da parte *a*, para quais valores de x, *f(x)* $\leq$ *g(x)*?

c)Qual é o maior número: $2^{\sqrt{2}}$ ou 2 $\sqrt{2}$?

8) Numa região do cerrado brasileiro a pesca predatória tem diminuído o número peixes de determinada espécie. Para evitar a extinção da mesma, autoridades interditaram a região impedindo a pesca e contrataram pesquisadores da USP para estudar a região. Esses estudos indicaram que o número de peixes N, decorridos m meses, é dado pela fórmula:

N = $5 \cdot 10^{3}$ - $5 \cdot 10^{2} \cdot 2^{0,1m}$ e que antes do retorno das atividades de pesca, o número de peixes deve ser 4000 para que a região volte ao equilíbrio.

Dessa forma quanto tempo a região ficará interditada?

Referências bibliográficas

STEWART, James , Cálculo, volume 1, 5ª edição

SMOLE, Kátia Cristina Stocco, KIYUKAMA Rokusaburo, Matemática - volume 1, 1ª edição

BARRETO, Benigno Filho, XAVIER, Claudio da Silva, Matemática aula por aula, volume único.

GERÔNIMO, João Roberto e FRANCO, Valdeni S, “Fundamentos de Matemática” – 2ª edição Maringá – PR, editora UEM, 2008 (página 173)