Redação

em Matemática

Leandro Augusto Ferreira
Coord. Profa. Dra Edna Maura Zuffi

Centro de Divulgação Científica e Cultural
Universidade de São Paulo - CDCC

Agosto - 2008

Sumário

"Não se preocupem com as dificuldades em matemática, as minhas são muito maiores"
Albert Einstein

Prefácio

Esta apostila foi elabora para a utilização no curso "Redação em matemática", ministrado no CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural) da USP em São Carlos. Pode servir como material de apoio para alunos do Ensino Médio, e tem como principal objetivo auxiliar no aprendizado da escrita em matemática.

A apostila está dividida de acordo com a ordem do curso: no *Capítulo 1*, tratamos da formalização do texto, caracterizando a dissertação em matemática de forma simplificada e prática, trabalhando com exemplos de exercícios de vestibulares de forma progressiva, conforme a ordem: *introdução*, *desenvolvimento* e *conclusão*. Demos ainda algumas orientações de como redigir um bom texto, mostrando algumas coisas que devemos evitar numa redação. No *Capítulo 2*, trabalhamos com a lógica matemática, assunto absolutamente importante no ensino de matemática, mas alertamos, que este assunto foi tratado com bastante simplicidade, deixando um pouco de lado o rigor dos bons livros de lógica, tentando passar apenas algumas idéias elementares. Ainda nesses capítulo, trouxemos alguns exercícios resolvidos e propostos. Deixamos algumas sugestões de como resolvê-los no final desta apostila.

Alguns assuntos, talvez pouco explorados no *Ensimo Médio*, foram acrescentados como apêndice, pois acreditamos que serão de grande valia ao leitor em sua base Matemática para empliar a compreensão e a redação de textos da área.

Gostaria de agradecer ao apoio dado pela *Profa. Dra. Edna Maura Zuffi* na coordenação deste projeto, ao apoio de *Jonas Eduardo Carraschi* pela colaboração na ministração do minicurso e a todos os participantes do mesmo.

Leandro Augusto Ferreira

São Carlos, 28 de Julho de 2008.

Capítulo 1

Formalização do texto

Para redigir um bom texto, é necessário estimular o raciocínio, a capacidade de análise e síntese. É preciso desenvolver um pensamento ordenado, revestido por um vocabulário expressivo, revelando assim, um repertório preciso e comunicativo.

Em matemática não é diferente: temos as mesmas necessidades quando desejamos redigir um bom texto, seja ele na resolução de um exercício ou na demonstração de uma proposição.

Daremos aqui alguns conceitos necessários para uma boa escrita. Nossos textos serão todos dissertativos, por isso estudaremos como fazer uma dissertação.

1.1 Dissertação

Dissertar é desenvolver uma idéia, uma opinião, um conceito ou tese sobre um determinado assunto. Como outras formas de redação, a dissertação se apóia em alguns elementos: **introdução, desenvolvimento** e **conlusão**.

A introdução deve apresentar, de maneira clara, o assunto que será tratado e delimitar as questões referentes a ele que serão abordadas. Neste momento pode-se formular uma tese, que deverá ser discutida e provada no texto, propor uma pergunta, cuja resposta deverá constar no desenvolvimento e explicitada na conclusão.

O desenvolvimento é a parte do texto em que as idéias, pontos de vista, conceitos, informações de que se dispõe serão desenvolvidas, desenroladas e avaliadas progressivamente.

A conclusão é o momento final do texto, e deverá apresentar um resumo forte de tudo o que já foi dito, expondo uma avaliação final do assunto discutido.

1.2 Dissertação em matemática

Quando resolvemos um exercício ou um problema de matemática, por exemplo, estamos também dissertando; estamos convencedo o leitor de que nosso raciocínio está correto. De forma análoga, vamos estabelecer os conceitos de introdução, desenvolvimento e conclusão, vistos na seção anterior.

A introdução deve apresentar as variáveis utilizadas no texto, bem como a que conjuntos pertencem e o que representam no problema. É claro que existem várias formas de fazer uma introdução: veremos basicamente duas formas, posteriormente.

O desenvolvimento é a parte do texto em que as idéias devem ser trabalhadas através da lógica, dos dados do problema e da simbologia matemática. Esta é a parte mais complexa do texto matemático, por isso não exibiremos aqui um método e, sim, resolveremos alguns problemas e comentaremos alguns tópicos mais relevantes.

A conclusão é parte mais simples, finalizamos o texto explicitando a resposta do problema, ou o que queríamos provar numa demonstração de uma proposição.

Daqui por diante, quando mencionarmos a palavra dissertação, estamos na verdade nos referindo a **dissertação em matemática**.

1.3 Simbologia

Muita gente se pergunta: "Por que devemos utilizar os símbolos quando redigimos um texto matemático?". A resposta para esta pergunta é bastante simples, utilizamos símbolos para escrever um texto de uma forma mais compacta e concentramos nossos esforços nos raciocínios, mais do que nas palavras em si.

Tome cuidado com o exagero em sua utilização, pois os textos em geral ficam carregados com o uso excessivo da simbologia, e nesse caso ficarão cansativos de serem lidos.

Vejamos agora alguns dos principais símbolos matemáticos:

- $\mathbb{N}$: Números naturais.
- $\mathbb{Z}$: Números inteiros.
- $\mathbb{Q}$: Números racionais.
- $\mathbb{I}$ ou $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$: Números irracionais.
- $\mathbb{R}$: Números reais.
- $\mathbb{C}$: Números Complexos.
- $\in$: Pertence
- $\subset$: Contido
- $\supset$: Contém
- $\Rightarrow$: Implica
- $\therefore$: Portanto
- $\exists$: Existe
- $\forall$: Para todo, ou "para qualquer".

Caso você não conheça o emprego correto destes símbolos, não tente simplesmente memorizá-los, eles aparecem natulmente no estudo da matemática do ensino fundamental e médio, e alguns deles serão comentados no **capítulo 2: Lógica matemática.**

1.4 Estrutura dissertativa

Assim como existem muitas maneiras de escrever um texto, uma introdução, o mesmo ocorre para o desenvolvimento e a conclusão. Na verdade mostraremos as maneiras mais comuns, na matemática, para tratar da resolução de exercícios e problemas.

1.4.1 Introdução

Como foi dito anteriormente, devemos exibir as variáveis do problema: para isto, uma maneira batante simples é nomear as variáveis colocando dois pontos (:) na frente delas e explicando o que representam. Esta forma não é nada rigorosa, pois não dizemos, necessariamente, a que conjunto pertencem as variáveis, por exemplo, mas para exercícios de sistemas lineares, é uma forma bastante prática, pois já sabemos, pelo contexto do problema, a que conjunto as variáveis pertencem.

Vejamos o exemplo abaixo, que mostra a utilização deste formato de introdução.

Exemplo 1.4.1 João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$21,50. Na mesa ao lado,algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

A introdução será feita da seguinte maneira:

x*: quantitade de hamburgueres*

y*: quantitade de sucos de laranja*

z*: quantitade de cocadas*

No texto fica bem claro que x,y,$z \in \mathbb{N}$, (x, y e z são números naturais), por isso foi omitido na introdução, mas em textos mais rigorosos, existe a necessidade desta informação, por isso adotaremos, sempre, uma maneira mais rigorosa para fazer uma introdução.

Uma outra forma de fazer a introdução, seria utilizando a palavra *"seja"*, para dizer quem são as variáveis do problema, logo em seguida a que conjuntos elas pertencem e o que representam no problema. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 1.4.2 Ainda no problema do exemplo 1.4.1, a introdução poderá ser feita da seguinte maneira:

Sejam x, y, $z \in \mathbb{N}$*, que representam respectivamente, quantidade de hamburgueres, de sucos de laranja e cocadas.*

Este formato é muito mais formal e completo, como já foi dito, mas caso o leitor não se sentiu muito à vontade em utilizá-lo, daremos a seguir mais um exemplo de sua utilização.

Exemplo 1.4.3 Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro n (tamanho do calçado) em função do comprimento c, do pé, em cm. Pela fórmula, tem-se $n = [x]$, onde $x = \frac{5}{4}c + 7$ e $[x]$ indica o menor inteiro maior ou igual a x. Por exemplo, se $c = 9$ cm, então $x = 18,25$ e $n = [18,25] = 19$. Com base nessa fórmula,

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.

b) se o comprimento do pé de uma pessoa é $c = 24$ cm, então ela calça 37. Se $c > 24$ cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

Sejam $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, como no enunciado.

Desta vez, de uma forma mais resumida, dizemos simplesmente que as variáveis são da mesma forma como no enunciado, já que no problema estava bem explicito o que x e c representavam.

1.4.2 Desenvolvimento

Chegamos, agora, na parte mais trabalhosa da dissertação e o mais importante é tentar escrever seu texto numa forma lógica sequencial, caso contrário, tornaremos a leitura do exercício uma verdadeira caça ao tesouro.

Prosseguiremos na resolução dos exemplos vistos no tópido introdução.

Exemplo 1.4.4 *Pelo exemplo 1.4.1, tínhamos concluído que:*

x: quantitade de hamburgueres

y: quantitade de sucos de laranja

z: quantitade de cocadas

Então, do enunciado, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 21,50 \\ 8x + 3y + 5z = 57 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

Pela regra de Crammer*, temos:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 21,5 & 1 & 2 \\ 57 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{1} = 4,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 21,5 & 2 \\ 8 & 57 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2,5}{1} = 2,5 \ e \ z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 21,5 \\ 8 & 3 & 57 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

Faremos algumas observações sobre o texto acima:

1. Utilizamos poucos símbolos na resolução.
2. Escrevemos o texto de forma objetiva, omitimos alguns cálculos.
   Ex: Não escrevemos passo a passo os cálculos dos determinantes.
3. Citamos a *Regra de Crammer*, pois a utilizamos na resolução.

Faremos a resolução de outro exemplo iniciado no tópico introdução.

Exemplo 1.4.5 *Pelo exemplo 1.4.3, temos:*

a) Pela fórmula dada, temos:

$$x = \frac{5}{4} \cdot 22 + 7 \Rightarrow x = 34,5$$
$$\therefore n = 35$$

b) Podemos escrever a desigualdade:

$$37 \leq \frac{5}{4} \cdot c + 7 \leq 38$$

Resolvendo, temos:

$$30 \leq \frac{5}{4} \cdot c \leq 31$$
$$24 = 30 \cdot \frac{4}{5} \leq c \leq 31 \cdot \frac{4}{5} = 24,8$$

Portanto, $c = 24,8$.

Faremos algumas observações sobre o texto acima:

1. Utilizamos alguns símbolos na resolução.

2. Escrevemos o texto de forma objetiva e omitimos alguns cálculos.
   Ex: Não escrevemos passo a passo os cálculos nas desigualdades.

3. Em $x = \frac{5}{4} \cdot 22 + 7 \Rightarrow x = 34,5$, poderíamos ter escrito $x = \frac{5}{4} \cdot 22 + 7 = 34,5$, sem a utilização do símbolo de implicação ($\Rightarrow$). Note que os símbolos "$\Rightarrow$" e "$=$" não são usados com as mesmos significados, em geral. Pense por quê.

1.4.3 Conclusão

Como já dissemos anteriormente, esta é parte mais simples do texto, uma vez que a resolução esteja feita, de forma clara, devemos destacar, no caso de um exercício ou problemas a sua resposta, ou, no caso de uma demonstração, o que queríamos demonstrar.

É importante sempre indicar as unidades de medida da variável utilizada. Vejamos, agora, alguns exemplos mostrando como devemos proceder.

Exemplo 1.4.6 *Pelo exemplo 1.4.4, temos:*

Logo o preço do hamburguer é R$ 4,00, o do suco de laranja é R$ 2,50 e o da cocaca é R$ 3,50.

Exemplo 1.4.7 *Pelo exemplo 1.4.5, temos:*

a) Portanto o número do calçado será 35.

b) Portanto, o maior tamanho de pé será $24,8$ *cm.*

Nas provas de vestibular, em geral, devemos ainda explicitar, no final da resolução, todas as respostas de cada item de forma resumida. Vejamos como ficariam os exemplos anteriores com este formato.

Exemplo 1.4.8 *Pelo exemplo 1.4.4, temos:*
Logo o preço do hamburguer é R$ 4,00, o do suco de laranja é R$ 2,50 e o da cocaca é R$ 3,50.

Respostas: *R$4,00, R$2,50 e R$3, 50*

Exemplo 1.4.9 *Pelo exemplo 1.4.5, temos:*

a) Portanto o número do calçado será 35.

b) Portanto o maior tamanho de pé será $24,8$ *cm.*

Respostas:

a) 35

b) 24,8 cm

1.5 Modelos de dissertação

Trataremos, aqui, do tipo de dissertação que interessa ao aluno do Ensino Médio. Em especial, daremos nesta seção uma contextualização para a formalização do texto.

1.5.1 A dissertação escolar

O aluno de Ensino Médio, principalmente o vestibulando, depara-se com uma grande dificuldade de elaborar textos matemáticos. A expressão das idéias é algo a ser conquistado, e em geral, o aluno precisa adquirir uma certa maturidade para expressar suas idéias de forma tão precisa.

Apesar de tratarmos aqui de alguns aspectos da criação de textos, sabemos o esforço que o aluno terá para aprender a escrever uma dissertação, ao longo de toda a sua formação escolar

1.5.2 "Receita" para um texto dissertativo

Considerando toda a formalização apresentada até aqui, observe a síntese das principais idéias de como elaborar um texto dissertativo.

- Como começar?
  Leia atentamente e interprete o enunciado.

- Como elaborar?
  Comece dizendo quais são as variáveis do problema, bem como a qual conjunto elas pertencem.

- Como argumentar?
  Seja claro e siga uma sequencia lógica no desenvolvimento, utilizando de forma moderada a simbologia matemática.

- Como concluir?
  Para concluir, interprete o racíocinio desenvolvido e escreva a resposta.

Etapas para elaborar uma dissertação

1. Ler atentamente o tema e refletir sobre o assunto.

2. Fazer um esboço do encadeamento das idéias.

3. Ler o texto, submetendo-o a uma avaliação crítica.

4. Passá-lo a limpo.

Orientação para elaborar uma dissertação

- Seu texto deve apresentar **introdução**, **desenvolvimento** e **conclusão**.

- Redija na 3^o pessoa do singular ou do plural, ou ainda na 1^o pessoa do plural. Por exemplo:

- ◦ **Sejam** a, b, c variáveis ...
- ◦ **Sabemos** que $a^2 = b^2 + c^2$ ...
- ◦ **Tome** $f(x) = x^2$ ...
- ◦ Desta forma **obtemos** o polinômio $p(x) = x^2 - 1$ ...

- Se não souber resolver o exercício, não tente inventar teorias matemáticas para aparentar resolvê-lo.
- Não construa frases embromatórias. Verifique se as palavras e símbolos empregados são fundamentais e informativos.
- Não utilize símbolos em demasia; isso pode tornar seu texto enfadonho.
- Observe se há repetição de idéias, falta de clareza e construções sem nexo.
- Verifique se os argumentos utilizados são convincentes.
- Tente citar os nomes dos principais teoremas e resultados da teoria que está utilizando, isso enriquece o texto, mas cuidado para não utilizá-los erroneamente.
- Não utilize abreviações das palavras usuais sa Língua Portuguesa: você corre o risco do leitor não enterder o que quer dizer.

1.5.3 Exemplos de textos dissertativos - Exercícios de vestibular

Exercício 1.5.1 *Em uma determinada residência, o consumo mensal de água com descarga de banheiro corresponde a 33% do consumo total e com higiene pessoal, 25% do total. No mês de novembro foram consumidos 25 000 litros de água no total e, da quantidade usada pela residência nesse mês para descarga de banheiro e higiene pessoal, uma adolescente, residente na casa, consumiu 40%. Determine a quantidade de água, em litros, consumida pela adolescente no mês de novembro com esses dois itens: descarga de banheiro e higiene pessoal.*

Resolução: *Sejam Q_d, Q_h e Q_a, respectivamente, as quantidades de descarga de banheiro, higiene pessoal e total de água consumida, por essa adolescente. Temos:*

$$\begin{cases} Q_d = 25\% \cdot 25000 = 6250 \\ Q_h = 33\% \cdot 25000 = 8250 \end{cases}$$

Logo, $Q_a = (40\% \cdot Q_d) + (40\% \cdot Q_h) = (40\% \cdot 6250) + (40\% \cdot 8250) =$

$= 2500 + 3300 = 5800$

Portanto a adolescente gastou 2500 litros com descarga, 3300 litros com higiene pessoal, somando no total 5800 litros.

Resposta: *2500 litros, 3300 litros e 5800 litros*

Exercício 1.5.2 *Uma empresa pretende, no ano de 2006, reduzir em 5% a produção de CO_2 com a queima de combustível de sua frota de carros, diminuindo a quantidade de quilômetros a serem rodados no ano. O total de quilômetros rodados pelos carros dessa empresa em 2005 foi de 199 200 km. Cada carro faz em média 12 km por litro de gasolina, e a queima de cada 415 litros desse combustível pelos carros da empresa produz aproximadamente uma tonelada de CO_2. Mantidas as mesmas condições para os carros, em termos de consumo e queima de combustível, determine quantas toneladas a menos de CO_2 os carros da empresa deixariam de emitir em 2006, relativamente ao ano de 2005.*

Resolução: *Sejam Q_l e Q_t, respectivamente, a quantidade de combustível, em litros, em 2005, e a quantidade, em toneladas, de CO_2 produzida pela queima desse combustível, então:*

$$Q_l = \frac{199200}{12} = 16600$$
$$Q_t = \frac{16600}{415} = 40$$

Portanto os carros deixariam de emitir 5% de $40t$, que é igual a $2t$.

Resposta: *2t (ou 2 toneladas)*

Exercício 1.5.3 *Seja x o número de anos decorridos a partir de 1960 ($x = 0$). A função $y = f(x) = x+320$ fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em ppm (partes por milhão) em função de x. A média de variação do nível do mar, em cm, em função de x, é dada aproximadamente pela função $g(x) = \frac{x}{5}$. Seja h a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2 . No diagrama seguinte estão representadas as funções f, g e h.*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & MV \\
C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

T: tempo (anos)
MV: Média da variação do nível do mar(cm)
C: Concentração de CO_2(ppm)

Determine a expressão de h em função de y e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm.

Resolução: *Sejam f, g e h, como no enunciado,*
e seja ainda $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $y \mapsto p(y)$.
Sabemos que:
$y = f(x) = x + 320$, então $x = y - 320$. Tome $p(y) = y - 320$, logo

$$h(y) = g \circ p(y) \Longrightarrow h(y) = \frac{1}{5} \cdot (y - 320)$$

Então: $h(400) = \dfrac{400 - 320}{5}$

O nível do mar terá subido 16cm.

Resposta: $h(y) = \frac{1}{5} \cdot (y - 320)$ *e 16 cm*

Exercício 1.5.4 *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$$

O determinante de A *é um polinômio* $p(x)$*.*

a) *Verifique se 2 é uma raiz de* $p(x)$*.*

b) *Determine todas as raízes de* $p(x)$*.*

Resolução:

a) *Seja* A *como no enunciado, como o determinante de* A *é* $p(x)$*, então* $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$*.*
Logo
$$p(2) = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$$
Portanto 2 *é raiz de* $p(x)$*.*

b) *Pelo* item a*, 2 é raiz de* $p(x)$
Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini*, temos:*

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Desta forma obtemos o polinômio $p(x) = x^2 - 1$*, cujo as raízes são:* ± 1*.*

Então $S = \{-1, 1, 2\}$

Respostas:

a) *2 é raiz de* $p(x)$

b) *-1,1 e 2.*

Exercício 1.5.5 *Um polinômio de grau 3 possui três raízes reais que, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética em que a soma dos termos é igual a* $\frac{9}{5}$ *. A diferença entre o quadrado da maior raiz e o quadrado da menor raiz é* $\frac{24}{5}$*. Sabendo-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio é 5, determine*

a) *a progressão aritmética.*

b) *o coeficiente do termo de grau 1 desse polinômio.*

Resolução:

a) Sejam $a-r$, a e $a+r$ as três raízes em progressão aritmética com $r>0$, temos, pelo enunciado:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a-r & + & a & + & a+r & = & \frac{9}{5} \\ (a+r)^2 & - & (a-r)^2 & = & \frac{24}{5} & & \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \dfrac{3}{5} \\ & & \\ r & = & 2 \end{array}\right.$$

Logo a progressão aritmética será:

$$-\frac{7}{5}, \frac{3}{5} \text{ e } \frac{13}{5}$$

b) Pelo enunciado, temos $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5$. Pelas relações de Girard*, temos:*

$$\frac{a_2}{5} = \left(-\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{7}{5}\cdot\frac{13}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{13}{5}\right) = -\frac{73}{5}$$

Respostas:

a) $-\frac{7}{5}, \frac{3}{5}$ *e* $\frac{13}{5}$

b) $-\frac{73}{5}$

Exercício 1.5.6 *Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$ sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine*

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.

b) o 20^o termo da progressão.

c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

Resolução:

a) Admitindo que $S_n = bn^2 + n$ é válida, então:

$$7 = a_3 = S_3 - S_2 = b2^2 + 2 - b3^2 - 3 = 5b + 1 \Longrightarrow b = \frac{6}{5}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 3b + 1 = 3\cdot\frac{6}{5} + 1 = \frac{23}{5}$$

Portanto a razão será:

$$r = a_3 - a_2 = 7 - \frac{23}{5} = \frac{12}{5}$$

b) Temos que

$$a_{20} = S_{20} - S_{19} = b20^2 + 20 - b19^2 - 19 = 39b + 1 = 39\cdot\frac{6}{5} = \frac{239}{5}$$

c) Utilizando a expressão fornecida pelo enunciado, temos:

$$S_{20} = b20^2 + 20 = 500$$

Respostas:

a) $b = \dfrac{6}{5}$ *e* $r = \dfrac{12}{5}$

b) $a_{20} = \dfrac{239}{5}$

c) $S_{20} = 500$

1.6 Exercícios propostos

1. Sejam a e b números inteiros e seja $\mathrm{N}(a,\ b)$ a soma do quadrado da diferença entre a e b com o dobro do produto de a por b.

   a) Calcule N(3, 9).

   b) Calcule $\mathrm{N}(a,\ 3a)$ e diga qual é o algarismo final de $\mathrm{N}(a,\ 3a)$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}$.

2. Em Matemática, um número natural a é chamado palíndromo se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8, 22 e 373 são palíndromos. Pergunta-se:

   a) Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9 999?

   b) Escolhendo-se ao acaso um número natural entre 1 e 9 999, qual é a probabilidade de que esse número seja palíndromo? Tal probabilidade é maior ou menor que 2%? Justifique sua resposta.

3. Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

4. Sejam a e b dois números inteiros positivos tais que $mdc(a,b) = 5$ e o $mmc(a,b) = 105$.

   a) Qual é o valor de b se $a = 35$?

   b) Encontre todos os valores possíveis para (a,b).

5. Dada a equação polinomial com coeficientes reais

$$x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$$

   a) Encontre o valor numérico de a de modo que o número complexo $2+i$ seja uma das raízes da referida equação.

   b) Para o valor de a, encontrado no item anterior, determine as outras duas raízes da mesma equação.

Capítulo 2

Lógica matemática

O objetivo deste capítulo é mostrar a importância da lógica matemática tanto na demonstração de teoremas quanto na leitura de enunciados e produções de textos.

2.1 Definições gerais

Definição 2.1.1 *Uma **proposição** é todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.*

Exemplo 2.1.1 Vejamos agora alguns exemplos de proposições.

a) A Lua é um Satélite da Terra.

b) Recife é a Capital de Pernambuco.

c) 5 é a raiz quadrada de 25.

d) $9 = 2 \cdot 4 + 1$

Definição 2.1.2 *Chamam-se **conectivos** palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.*

Estudaremos apenas os conectivos:

a) e

b) ou

c) Não

d) Se, então

e) Se, e somente se

Pois são os mais utilizados em lógica matemática.

Exemplo 2.1.2 Vejamos alguns exemplos de proposições formadas por outra proposições utilizando os conectivos listados acima.

a) O número 6 é par **e** *o número 8 é cubo perfeito.*

b) O triângulo ABC é retângulo **ou** *é isósceles.*

c) ***Não*** *está chovendo.*

d) ***Se*** *Jorge é Policial,* ***então*** *ele tem arma.*

e) O triângulo ABC é eqüilátero ***se, e somente se*** *é eqüiângulo.*

2.2 Princípios da lógica matemática

Enunciaremos aqui os dois prncípios da lógica matemática.

2.2.1 Não contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

2.2.2 Terceiro excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

2.3 Proposições do tipo "se A, então B"

Encontra-se com freqüência um tipo de proposição importante em Matemática: as proposições da forma **se** A**, então** B, onde, A e B são proposições. Note que formamos esta proposição utilizando o conectivo *Se, então*, mostrado anteriormente. Esta comumente chamada de "implicação lógica".

Exemplo 2.3.1 *Os exemplos a seguir serão utilizados em todo capítulo.*

PROPOSIÇÃO 2.3.1 *Se m e n são inteiros pares, então o produto é um inteiro par.*

PROPOSIÇÃO 2.3.2 *Se m é inteiro ímpar, então $m = 2k^2 + 1$, para algum número inteiro k.*

Na **proposição 2.3.1**, A é a proposição "m e n são inteiros pares", e B é a proposição "produto $m \cdot n$ é um inteiro par".

Na **proposição 2.3.2**, A é a sentença "m é inteiro ímpar", e B é a sentença "$m = 2k^2 + 1$, para algum número inteiro k."

A partir de agora, chamaremos A de **hipótese** e B de **Tese**.

Analisando as proposições acima, o leitor pode se perguntar: "As proposições acima sempre são verdadeiras?", ou ainda: "Proposições do tipo se A, então B são sempre verdadeiras?". A resposta para essas perguntas é **não**, vejamos quando uma proposição deste tipo é verdadeira.

Uma proposição "Se A, então B"é verdadeira quando em **todas**
as situações nas quais a hipótese seja verdadeira
a tese também seja verdadeira.

Então podemos concluir que uma proposição "Se A, então B"é falsa quando em pelo menos uma situação a hipótese seja verdadeira a tese seja falsa. Neste caso, dizemos que a proposição possui um contra-exemplo, ou seja, um exemplo que mostra que a proposição é falsa.

Vejamos, abaixo, um *contra-exemplo* para a proposição 2.

Exemplo 2.3.2 *Tome o inteiro 5, sabemos que o mesmo é **ímpar** e* $5 \neq 2k^2+1$*, para qualquer que seja* k*. (Experimente!)*

Cuidado: Enquanto um só contra-exemplo permite concluir
que uma proposição é falsa,
não basta exibir exemplos para
mostrar que uma proposição seja verdadeira.

Mais adiante veremos como mostrar quando uma proposição é verdadeira, mas vejamos primeiro como podemos reformular uma proposição deste tipo.

- A implica B.
- $A \Longrightarrow B$.
- Se A for verdadeira, então B será verdadeira.
- A é uma condição suficiente para B
- B é uma condição necessária para A.

2.4 A recíproca de uma proposição

Considere uma proposição do tipo **"Se A', então B"**, a proposição **"Se B, então A"** é dita ser a recíproca da proposição inicial.

Exemplo 2.4.1

Se a proposição é verdadeira não significa que a recíproca seja verdadeira e vice-versa, por isso estudaremos o caso quando ambas são verdadeiras.

2.5 Proposições do tipo "A se, e somente se B"

Como foi dito anteriormente, se tivermos que uma proposição e sua recíproca sejam ambas verdadeiras, então teremos uma proposição "A se, e somente se B".

De forma análoga, mostraremos as formas equivalentes de enunciar este tipo de proposição.

- A implica B e reciprocamente

- $A \Longleftrightarrow B$
- A é verdadeira se, e somente se, B for verdadeira
- A é uma condição necessária e suficiente para B
- A e B são equivalentes.

Uma proposição "A se, e somente se B" é verdadeira quando "Se A, então B" e "Se B, então A" são verdadeiras..

Observação: Se tivermos, por exemplo, duas definições equivalentes, então deveremos mostrar que a primeira implica na segunda e a segunda na primeira.

2.6 Negação de uma Proposição

Será de extrema importância o conceito de negação de uma proposição, não que isso irá de fato mudar sua vida, mas geralmente muitos alunos cometem erros quando tentam negar proposições. Denotaremos a negação de uma proposição P por não P, ou simplesmente por $\sim P$.

Exemplo 2.6.1 *"Rodrigo não é cantor." é a negação da proposição "Rodrigo é cantor."*

2.6.1 Negação de conectivos

Quando negamos uma proposição nossa intuição falha quando tentamos negar conectivos. Vejamos como fazer isso.

1. Não "e" = "ou"
2. Não "ou" = "e"
3. Não "Para todo" = "Existe"
4. "Não Existe" = "Para todo"

Vejamos alguns exemplo de negações de proposições

Exemplo 2.6.2 *Vamos negar as proposições abaixo:*

a) Eu tenho um carro.

b) Renato é aluno e mecânico.

c) Para toda tampa existe uma panela.

Então a negação será:

a) Eu não *tenho um carro.*

b) Renato não *é aluno* ***ou*** *mecânico.*

c) ***Existe*** *uma panela que* Não *tem tampa.*

2.7 Exercícios resolvidos

Exercício 2.7.1 *Se alguém te dissesse: "Se fizer Sol então eu vou à praia", e dias depois você visse essa pessoa na praia o que você concluiria?*

Resolução:

Nada podemos concluir, pois se trata de uma proposição do tipo "Se A, então B", logo, se B, é verdadeira não, podemos concluir que A é verdadeira. (Pode estar chovendo e ele estar na praia, pois a afirmação não diz nada sobre quando estiver chovendo).

2.8 Tipos de Demonstrações

Vejamos como podemos responder a questão deixada na seção anterior, ou seja, como podemos demonstrar (mostrar, provar,..) que uma proposição é verdadeira. Infelizmente não existe um método prático para fazer isso em qualquer situação, aliás existem problemas abertos na matemática que ainda não se sabe como demonstrar e prêmios que valem US$ 1.000.000. Mas podemos responder outra pergunta: "Quais são as maneiras de se provar uma proposição?" , vejamos abaixo, como classificá-las:

1. Demonstração direta
2. Demonstração por meio de argumentos lógicos
3. Demonstração por contradição (ou por absurdo)

Ao final de cada demonstração, devemos indicar ao leitor o seu término. Isso pode ser feito de duas formas: utilizando o símbolo ■ ou a sigla ***c.q.d***.

2.8.1 Demonstração direta

Neste tipo de demonstração, verificamos todos os casos em que a proposição seja verdadeira. É bom lembrar que isto só acontece quando temos um número finito de casos para verificar.

Exemplo 2.8.1 *Considere a proposição "Se $n \in \{3, 5, 17, 31\}$, então n é um número primo"*
verificaremos os casos em que a proposição seja verdadeira.
Como podemos ver, todos os números deste conjunto são primos, logo a proposição é verdadeira.

Exemplo 2.8.2 *Prove que o conjunto $P = \{6, 28, 496\}$, possui pelo menos 2 números perfeitos .*
Prova:
Vejamos, os divisores próprios de 6 são 3, 2 e 1 e $6 = 3 + 2 + 1$
e analogamente temos que $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, logo 6 e 28 são números perfeitos.
Portanto P possui pelo menos 2 números perfeitos.

2.8.2 Demonstração por meio de argumentos lógicos

Esse tipo é a mais utilizada, talvez a idéia mais intuitiva quando tentamos fazer uma demonstração. O objetivo é concluir a veracidade da tese com argurmentos lógicos e sempre utilizando as hipóteses. Embora pareça fácil, não existe um método prático para este tipo de demonstração; aliás, essa é a maior dificuldade de se provar proposições.

Veremos agora alguns exemplos de demonstrações.

Exemplo 2.8.3 *Prove que o quadrado de um número par é sempre par e o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar.*

Prova:
Seja x um número par, então $x = 2n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, elevando x ao quadrado, temos $x^2 = (2n)^2$, então $x^2 = 2^2n^2 = 2(2n^2)$. Logo x^2 é par.

Analogamente, seja x um número ímpar, então $x = 2n+1$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, elevando x ao quadrado, temos $x^2 = (2n+1)^2$, então $x^2 = (2n)^2 + 2(2n) + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Logo x^2 é ímpar.

■

Exemplo 2.8.4 *Prove que $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = x^2 - 1$, não possuem raízes em comum.*

Prova: *Achando as raízes de $p(x)$*

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

então por Báskara $x = 2$ *ou* $x = 3$
Portanto

$$S_1 = \{2, 3\}$$

Achando as raízes de $q(x)$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1,$$

Portanto

$$S_2 = \{-1, 1\}$$

Como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, então $p(x)$ e $q(x)$ não possuem raízes em comum.

■

2.8.3 Demonstração por contradição (ou por absurdo)

Este tipo de demonstração é muito comum em matemática, apesar de não ser natural aos iniciantes.

Para provamos uma proposição por absurdo, procedemos da seguinte maneira: Negamos a tese e chegamos na negação da hipótese. Veremos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.8.5 *Prove que* $p(x) = x^2 - 5x + 6$ *e* $q(x) = x^2 - 1$, *não possuem raízes em comum.*

Prova: *Vamos supor por absurdo que* $p(x)$ *e* $q(x)$ *possuam pelo menos uma raiz em comum. Então existe um número* a *tal que* $p(a) = q(a)$

$$a^2 - 5a + 6 = a^2 - 1$$

Então

$$5a - 6 = 1,$$

$$Logo\ a = \frac{7}{5}$$

Como $p(\frac{7}{5}) \neq 0$, *então chegamos num absurdo.*

Portanto $p(x)$ *e* $q(x)$ *não possuem raízes em comum.*

■

Exemplo 2.8.6 *Prove que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional .*

Prova: *Vamos supor por absurdo que* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, *então existem* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{Z}^*$, *tais que* $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, *seja uma **fração irredutível**. Elevando ao quadrado, temos:*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2,$$

Então p^2 *é par.*

Afirmação: p^2 *é par, então* p *também é par.*

Vamos supor por absurdo que p *fosse ímpar, então* $p = 2k + 1$, *para algum* $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow p^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, *logo* p^2 *é ímpar.*

Mas isso é um absurdo, pois p^2 *é par.*

Então p *é par.*

Como p *é par, então* $p = 2a$. *Logo*

$$(2a)^2 = 2q^2$$

$$2a^2 = q^2,$$

Analogamente q^2 *é par e portanto* q *é par.*

Portanto $\frac{p}{q}$ *é uma fração redutível, pois* p *e* q *são ambos pares.*

o que é um absurdo, pois $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.
Logo $\sqrt{2}$ não é um número racional.

2.9 Nomenclatura para proposições

Estudamos até agora um tipo especial de proposições, mas veremos que existem contextos em que nomeamos estes tipos de proposições. Vejamos agora esta nomenclatura.

- **Axioma:** Proposição aceita como verdadeira.
- **Teorema:** Proposição que pode ser demonstrada.
- **Lema:** Teorema usado na demonstrações de outros teoremas principais.
- **Corolário:** Consequência imediata de um teorema.

2.10 Exercícios Resolvidos

Exercício 2.10.1 *Sejam A e B duas matrizes de ordem $n \times n$, tal que n é inteiro. Sabendo que $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$:*

a) Mostre o resultado para o caso particular $n = 2$.

b) Mostre que $det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$, onde A^{-1} é a inversa de A.

Resolução:

a) *Tome* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$*, então fazendo a multiplicação de matrizes temos:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Calculando $det(A \cdot B)$, temos:

$$det(A \cdot B) =$$

$$(a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21})(a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) - (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21})(a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22})$$

$$=$$

$$(a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{21} \cdot b_{12} + a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{22} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{22} \cdot b_{22}) -$$

$$(a_{21} \cdot b_{11} \cdot a_{11} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot a_{11} \cdot b_{12} + a_{21} \cdot b_{11} \cdot a_{12} \cdot b_{22} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot a_{12} \cdot b_{22})$$

$$=$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{11} \cdot b_{22} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{12} \cdot b_{21}) - (a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{12} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{22})$$

$$=$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{11} \cdot b_{22} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{12} \cdot b_{21} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{22} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{12} \cdot b_{21}$$

$$=$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) = det(A) \cdot det(B).$$

■

b) *Sabemos que $A \cdot A^{-1} = I_n$, então $det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(A \cdot A^{-1}) = det(I_n) = 1$*

■

Exercício 2.10.2 *Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo.*

a) Mostre que as tangentes desses três ângulos não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.

b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam números inteiros positivos, calcule essas tangentes.

Resolução:

a) Suponha por absurdo que as três tangentes sejam maiores ou iguais a 2, ou seja,

$$\begin{cases} tg(\alpha) & \geqslant & 2 \\ tg(\beta) & \geqslant & 2 \\ tg(\gamma) & \geqslant & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha & > & 60^o \\ \beta & > & 60^o \\ \gamma & > & 60^o \end{cases}$$

Então chegamos num absurdo, que $\alpha + \beta + \gamma > 180^o$.

b) Sabemos que $\alpha + \beta = 180^o - \gamma$, então:

$$tg(\alpha + \beta) = tg(-\gamma) = -tg(\gamma), \text{ então}$$

$$\frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha) \cdot tg(\beta)} = -tg(\gamma)$$

$$tg(\alpha) + tg(\beta) = -tg(\gamma) + tg(\alpha) \cdot tg(\beta) \cdot tg(\gamma)$$

$$tg(\alpha) + tg(\beta) + tg(\gamma) = tg(\alpha) \cdot tg(\beta) \cdot tg(\gamma).$$

Pelo ***item a****, sabemos que as tangentes não podem ser todas elas maiores que 2, então sabemos que pelo menos uma das tangentes é igual a 1, pois são números inteiros, supondo digamos que $tg(\alpha) = 1$, então*

$$1 + tg(\beta) + tg(\gamma) = tg(\beta) \cdot tg(\gamma).$$

Como todas as tangentes são números inteiros positivos, então basta testar um número pequeno que casos e concluir que $tg(\alpha) = 1$, $tg(\beta) = 2$ e $tg(\gamma) = 3$.

Respostas:

a) Demosntração

b) 1, 2 e 3

Exercício 2.10.3 *Sejam $x = 1$ e $y = 0,999\ldots$ (dízima períodica). Quais das afirmações são verdadeiras?*

a) $x < y$

b) $x = y$

c) $x > y$

Justifique rigorosamente sua resposta.

Resolução: *Exibiremos duas maneiras para resolver esse exercício.*

1º Modo *Sabemos que* $y = 0,999\ldots$, *então* $10y = 9,999\ldots$.
Subtraindo a segunda equação pela primeira, temos:

$$10y - y = 9,999\ldots - 0,999\ldots \Longrightarrow 9y = 9 \Longrightarrow y = 1,$$

e portanto $x = y$.

$\blacksquare$

2º Modo *Sabemos que* $y = 0,999\ldots$, *então escrevendo y uma forma diferente, temos:*

$$y = 0,999\ldots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots$$

que é nada mais do que uma soma infinita de uma P.G. $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \ldots)_{r=10^{-1}}$, *logo*

$$y = 0,999\ldots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots = \frac{0,9}{1 - 10^{-1}} = \frac{0,9}{0,9} = 1 = x,$$

logo $x = y$.

$\blacksquare$

Alternativa ***b***

Exercício 2.10.4 *Considere as funções* $f(x) = \log_3(9x^2)$ *e* $g(x) = \log_3(\frac{1}{x})$, *definidas para todo* $x > 0$.

a) *Resolva as equações* $f(x) = 1$ *e* $g(x) = -3$

b) *Mostre que* $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$

Resolução:

a) $\log_3(9x^2) = 1 \Longrightarrow 9x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, *mas como tinhamos a condição* $x > 0$.

$$\text{Então } S = \{\frac{\sqrt{3}}{3}\}$$

$\log_3(\frac{1}{x}) = -3 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{27} \Longrightarrow x = 27.$

$$\text{Então } S = \{27\}$$

b) *Temos que:*

$$1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3(\frac{1}{x}) =$$

$$\log_3(3) + \log_3(9x^2) + \log_3(\frac{1}{x}) = \log_3(3 \cdot 9x^2 \cdot \frac{1}{x}) =$$

$$\log_3(3^3x) = \log_3(3^3) + \log_3(x) = 3 + \log_3$$

$\blacksquare$

2.11 Exercícios Propostos

1. Sejam a e b números naturais, mostre que:

   a) Se a e b são pares, então $a + b$ é par.

   b) Se a e b são pares, então $a \cdot b$ é par.

   c) Se a e b são ímpares, então $a + b$ é par.

   d) Se a e b são ímpares, então $a \cdot b$ é ímpar.

2. Prove as seguintes igualdades trigonométricas:

   a) $cos(a^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$

   b) $sen(a^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2a$

   c) $sen(a + b) \cdot sen(a - b) = cos^2a - cos^2b$

3. Prove que:

   a) A função $f : X \longrightarrow Y$ é injetora se, e somente se, existe uma função $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$.

   b) A função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetora se, e somente se, existe uma função $h : Y \longrightarrow X$ tal que $f(h(y)) = y$, para todo $y \in Y$.

4. Mostre que se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, $c \neq 1$ então:

$$log_c(\frac{a}{b}) = log_c(a) - log_c(b)$$

5. Demonstre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também bissetriz.

6. Demonstre que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana.

7. Demonstre que as medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

8. Enuncie e prove o *teorema de Pitágoras.*

Sugestões e Respostas

Cap. 1

1. a) Primeiro calcule a expressão geral $N(a,b) = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$, para então concluir que $N(3,9) = 90$.

   b) Com a expressão geral encontrada conclua que $N(a, 3a)$ é um número múltiplo de 10, logo possui final 0.

2. a) 198 números palíndromos.

   b) Calculando a probabilidade, temos $\dfrac{198}{9999} = \dfrac{22}{1111} = \dfrac{2}{101} < \dfrac{2}{100} = 2\%$

3. Amélia possui 24 reais, Lúcia possui 18 reais e Maria possui 36 reais.

4. a) Utilize a relação $mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = a \cdot b$, então conclua que $b = 15$

   b) Decomponha 105 em números primos e veja que o único fator comum entre 105 e 35 é 5, então as únicas possibilidades são (5; 105), (15; 35), (35; 15) ou (105; 5).

5. a) Substitua $2 + i$ na equação e iguale a zero, obtendo $a = 5$.

   b) Utilize o teorema das raízes complexas e conclua que $2 - i$ é uma outra raiz da equação, utilize uma das relações de Girard e conclua que 1 é a terceira raiz.

Cap. 2

1. a) Tome $a = 2k$ e $b = 2n$, então $a + b = 2(k + n)$. Logo $a + b$ é par.

   b) Tome $a = 2k$ e $b = 2n$, então $a \cdot b = 2(k \cdot n)$. Logo $a \cdot b$ é par.

   c) Tome $a = 2k + 1$ e $b = 2n + 1$, então $a + b = 2(k + n + 1)$.Logo $a + b$ é par.

   d) Tome $a = 2k + 1$ e $b = 2n + 1$, então $a \cdot b = 2[2(k \cdot n) + (k \cdot n)] + 1 =$. Logo $a \cdot b$ é ímpar.

2. a) Na fórmula da soma de cossenos, $cos(a+b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)$, tome $a = b$. Então $cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a) = cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 \Longrightarrow cos(a^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$

   b) Análogo ao "item a".

   c) Na fórmula da soma e diferença de senos, temos $sen(a+b) = sen(a) \cdot cos(b) + sen(b) \cdot cos(a)$ e $sen(a-b) = sen(a) \cdot cos(b) - sen(b) \cdot cos(a)$. Então faça $sen(a+b) \cdot sen(a-b)$ e conclua a igualdade.

3. a) Sabemos que f é injetora, logo se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$, portanto tomamos $g(x) = x$, pois $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Reciprocamente, se existe uma $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$, então em particular, $g(f(x_1)) = x_1$ e $g(f(x_2)) = x_2$, logo se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$, o que implica que f é injetora.

4. Tome $x = log(\frac{a}{b})_c$, $y = log(a)_c$ e $z = log(b)_c$. Pelas propriedades de logaritmo e potenciação, temos: $c^x = \frac{a}{b}$, $c^y = a$ e $c^z = b \Longrightarrow c^x = \dfrac{c^y}{c^z} = c^{y-z} \Longrightarrow x = y - z \Longrightarrow log(\frac{a}{b})_c = log(a)_c - log(b)_c$.

5. Tome um triângulo ABC isósceles de base BC, seja M um ponto em BC, tal que AM seja a mediana. Por construção $AB \equiv AC$ e $BM \equiv MC$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, logo pelo caso *LAL (lado ângulo lado)*, os triângulo ABM e ACM são congruentes e portanto os ângulos $B\widehat{A}M$ e $C\widehat{A}M$ são congruentes e por isso AM também é a bissetriz do triângulo.

6. Análogo ao anterior.

7. Tome um triângulo ABC isósceles de base BC, sejam M, N, pontos em AC e AB,respectivamente, tais que BM e CN sejam as medianas destes triângulos relativas aos lados AC e AB. Construímos, desta forma, dois triângulos ACN e ABM congruentes pelo caso *LAL*, então concluímos que BM e CN são congruentes.

Apêndice A

Cálculo de inversa de matrizes

A.1 Via sistemas lineares

Definição A.1.1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, se exister uma matriz quadrada A^{-1} de ordem n tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$ e $A^{-1} \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n, então A^{-1} é dita ser a matriz inversa de A.*

Veremos agora através de um exemplo como podemos encontrar a matriz inversa pela definição.

Exemplo A.1.1 *Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, então tomamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, usando a definição, temos:*

$$A \cdot A^{-1} = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fazendo a multiplicação das matrizes e igualdando matriz resultante com a matriz identidade, temos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_{11} & + & x_{21} & = & 1 \\ 2x_{12} & + & x_{22} & = & 0 \\ x_{11} & + & 2x_{21} & = & 1 \\ x_{12} & + & 2x_{22} & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_{11} & = & \dfrac{2}{3} \\ x_{12} & = & -\dfrac{1}{3} \\ x_{21} & = & -\dfrac{1}{3} \\ x_{22} & = & \dfrac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\textit{Logo, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A.2 Via matriz dos cofatores

Com o uso deste método é possível calcular inversas de matrizes de ordem maiores que 2 e 3, cujo os cálculos pela definição costumam ser longos.

Definição A.2.1 *Sejam M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e a_{ij} um elemento de M, definimos **menor complementar** do elemento a_{ij}, o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M e o indicaremos por D_{ij}.*

Definição A.2.2 *Sejam M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e a_{ij} um elemento de M, o **cofator** do elemento a_{ij} é dito ser, o número $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{ij}$ e o indicaremos por A_{ij}*

Exemplo A.2.1 *Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, calculando os cofatores de $a_{11} = 4$ e $a_{23} = 5$*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \text{ e } A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Definição A.2.3 *Seja M uma matriz quadrada, a matriz formada pelos cofatores dos elemnetos de M é dita ser **a matriz dos cofatores** de M e é representada por M', ou seja,*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow M' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo A.2.2 *Seja $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculando os cofatores da matriz M, temos*

$$A_{11} = 2,\ A_{12} = -1,\ A_{21} = -1 \text{ e } A_{22} = -2$$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo A.2.3 *Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculando os cofatores da matriz M, temos*

$$\begin{gathered} A_{11} = -3,\ A_{12} = 9,\ A_{13} = -1, \\ A_{21} = 2,\ A_{22} = -6,\ A_{23} = -1 \\ A_{31} = -2,\ A_{32} = 1,\ A_{33} = 1 \end{gathered}$$

$$M^{'} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição A.2.4 *Seja M como na definição anterior, a transposta da matriz dos cofatores é dita ser a matriz adjunta, e é denotada por*

$$\overline{M} = (M^{'})^{t}.$$

TEOREMA A.2.1 *Seja M é uma matriz quadrada de ordem n e $det(M) \neq 0$ então a **matriz inversa** é dada por:*

$$M^{-1} = \frac{\overline{M}}{det(M)}.$$

Exemplo A.2.4 *Seja* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *Vemos facilmente que*

$$det(M) = -5,$$

Então

$$M^{'} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{M} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo teorema,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Apêndice B

Método para resolução de sistemas lineares

Sejam A, X e B matrizes, tais que A seja invertível e

$$A \cdot X = B$$

Como A é invertível então existe uma matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Se multiplicarmos $A \cdot X = B$, por A^{-1}, teremos:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

Então

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

E como vimos, conseguimos expressar a matrix X em função de A e B.
Agora considere o sistema linear abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Sejam A, X e B matrizes, então Tome $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

E desta forma, encontramos a matriz X formada pela incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ e então resolvemos o sistema linear.

Observe que ao fazermos a multiplicação de matrizes, obtemos exatamente o sistema linear exibido. Então, como visto anteriormente podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemplo B.0.5 *Vamos resolver o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} -x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & -3 \end{cases}$$

Escrevendo na forma de matriz, temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Agora precisamos achar a matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando o método *via matriz dos cofatores*, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{6}{27} \\ \frac{14}{27} & \frac{5}{27} & \frac{3}{27} \\ -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} & -\frac{3}{27} \end{pmatrix}$$

Fazendo a multiplicação de matriz, temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{6}{27} \\ \frac{14}{27} & \frac{5}{27} & \frac{3}{27} \\ -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} & -\frac{3}{27} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo a solução do sistema linear é: $S = \{(2, 3, 0)\}$.

Apêndice C

Equações algébricas

Exibiremos aqui alguns teoremas sobre a teoria das equações algébricas. Esperamos que o leitor esteja familiarizado com polinômios e números complexos.

TEOREMA C.0.2 *Seja $P(x)$ um polinômio cujos coeficientes são todos reais, admitindo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como raiz, então $P(x)$ também admite $\overline{z} = a - bi$ como raiz.*
Prova:
Se $z = a + bi$ é uma raiz de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, então $P(z) = 0$. Logo,

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0,$$

Ora, mas então o conjugado deste número também é zero.

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0} = 0$$

utilizando as propriedades de números complexos, temos

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} = 0$$

$$a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z}^1 + a_0 = 0$$

$$P(\overline{z}) = 0.$$

Portanto $\overline{z}$ também é raiz de $P(x)$.

Exemplo C.0.6

COROLÁRIO C.0.1 *Seja $P(x)$ um polinômio cujos coeficientes são todos reais, admitindo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como raiz de multiplicidade p, então $P(x)$ também admite $\overline{z} = a - bi$ como raiz de multiplicidade p.*

Exemplo C.0.7

TEOREMA C.0.3 *Todo polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, talque $\partial(P(x)) = n \geqslant 1$, pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, ou seja,*

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

onde r_1, r_2,... ,r_n são as raízes de $P(x)$.
Esta decomposição é única.

Exemplo C.0.8 *Seja* $P(x) = 2x^2 - 10x + 12$ *pode ser decomposto como* $P(x) = 2(x-2)(x-3)$*, onde 2 e 3 são as raízes de* $P(x)$*.*

TEOREMA C.0.4 (TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS) *Se um polinômio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$*, possui todos os coeficientes inteiros, admite uma raiz racional* $\frac{p}{q}$*, onde* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $p \in \mathbb{Z}_+$*, então* p/a_0 *e* q/a_n*(p divide* a_0 *e q divide* a_n *.*

Exemplo C.0.9 *Ache as raízes da equação*

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$$

pelo teorema das raízes racionais*, temos* $p \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$ *(divisores inteiros de (-9)) e* $q \in \{1\}$*(divisores positivos de 1),*
então $\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$
agora basta testar as candidatas a raiz de $P(x)$

$$P(-1) = -4,\ P(1) = -8,\ P(-3) = 0,\ P(3) = 36,\ P(-9) = -468 \text{ e } P(9) = -522$$

Logo, -3 é raiz da equação.
Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini*, temos:*

-3	1	3	-3	-9
	1	0	-3	0

Desta forma, achamos a equação $x^2 - 3 = 0$*, cuja a solução é* $x = \pm\sqrt{3}$
Portanto a solução da equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$*, será* $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -3\}$*.*

Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, G., Hazzan, S.(1998) - Fundamentos de Matemática Elementar, vol.4

[2] Iezzi, G.(1996) - Fundamentos de Matemática Elementar, vol.6

[3] Filho, E. A. (2000) - Iniciação a Lógica Matemática

[4] S.B.M (1998) - Revista do Professor de Matemática, 37

[5] Massaranduba, E. M., Chinellatto, T. M. (2003) - Coleção Objetivo - Redação

Índice Remissivo