Usando Kits da Experimentoteca de Matemática para aprofundar assuntos do Ensino Fundamental

Leandro Augusto Ferreira

Coordenação: Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

O Professor Está Sempre Errado Quando...

É jovem, não tem experiência.
É velho, está superado.
Não tem automóvel, é um pobre coitado.
Tem automóvel, chora de "barriga cheia".
Fala em voz alta, vive gritando.
Fala em tom normal, ninguém escuta.
Não falta ao colégio, é um "caxias".
Precisa faltar, é um "turista".
Conversa com os outros professores, está "malhando" os alunos.
Não conversa, é um desligado.
Dá muita matéria, não tem dó do aluno.
Dá pouca matéria, não prepara os alunos.
Brinca com a turma, é metido a engraçado.
Não brinca com a turma, é um chato.
Chama a atenção, é um grosso.
Não chama a atenção, não sabe se impor.
A prova é longa, não dá tempo.
A prova é curta, tira as chances do aluno.
Escreve muito, não explica.
Explica muito, o caderno não tem nada.
Fala corretamente, ninguém entende.
Fala a "língua" do aluno, não tem vocabulário.
Exige, é rude.
Elogia, é debochado.
O aluno é reprovado, é perseguição.
O aluno é aprovado, deu "mole".
É o professor está sempre errado, mas,
se conseguiu ler até aqui, agradeça a ele.

Revista do Professor de Matemática, 36,1998.

Índice

Prefácio

Esta apostila foi elabora para que fosse utilizada no curso “Usando Kits da Experimentoteca de Matemática para aprofundar assuntos do Ensino Fundamental”, ministrado no CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural) da USP São Carlos. Foi escrita com a preocupação de poder ser usada como material de apoio em aulas práticas de matemática elementar.

A apostila está dividida de acordo com a ordem do curso, no *Capítulo 1* trouxemos alguns dados sobre o tangram e propusemos algumas atividades com construções de figuras. No *Capítulo 2* falamos sobre a construção de frações equivalentes, mas ao mesmo tempo alertamos que não aconselhamos que seja feita a construção em sala de aula, isso exigiria uma abstração maior do aluno do ensino fundamental, essencialmente estabelecemos um critério para a verificação da equivalência de frações. No *Capítulo 3*, trabalhamos com a técnica de cortar e colar para provar a fórmula da área de alguns polígonos notáveis. No *Capítulo 4* expusemos um método para a resolução de equações lineares com solução inteira e a fatoração de um trinômio, que posteriormente cairia no caso linear e assim seria resolvido. E finalmente, no *Capítulo 5* provamos a fórmula da área de um círculo com papel toalha (papel higiênico), alertamos que foi utilizado o uso de limite, mas que foi feito de uma forma deveras simples, assim acreditamos não ter tornado a prova demasiadamente difícil.

Os exercícios são de extrema importância e acreditamos que não sejam difíceis, mas mesmo assim trouxemos a resolução de alguns deles. Em cursos posteriores poderemos aumentar o número de exercícios propostos, claro que sempre fazendo com que isso seja feito de uma forma agradável ao leitor.

Alguns dos métodos expostos podem ser futuramente transformados em Kits da experimentoteca do ensino fundamental ou médio, sendo melhorados e adaptados para os devidos fins.

Gostaria de agradecer ao apoio dado pela *Profa. Dra. Edna Maura Zuffi* na coordenação deste projeto e aos participantes do minicurso ministrado no CDCC.

Leandro Augusto Ferreira

São Carlos, 31 de Outubro de 2007.

Introdução

§ 1 – Erros em materiais didáticos

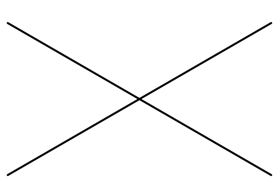
Alguns anos atrás a revista RPM fez um alerta sobre alguns fascículos de matemáticas publicados num grande jornal, vejamos alguns exemplos dos erros encontrados nestes fascículos:

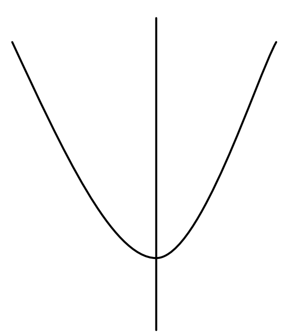
- Na página 196: “A maneira mais simples de provar que os números irracionais existem é representá-la sobre uma reta e observar que eles têm lugar nela”.

  Foi fácil para mim “provar” que fantasmas existem: eu representei um deles na reta abaixo e – pronto - ele existe!

- Na página 31, no glossário: **Reta tangente:** reta que toca um alinha em um único ponto. “Isto é, elas têm apenas um ponto em comum”.

Figura para mostrar o erro da afirmação acima.





- Na página 97, no glossário: **Infinito:** que não tem fim nem pode tê-lo. E se não tem fim, mas puder tê-lo (sabe-se lá onde ou quando) ????

- Em um fascículo publicado por outro jornal, a palavra *plane* (plano, em inglês) foi traduzida como "avião".

Imagine nossos alunos aprenderem: por 3 pontos não colineares passa um único avião".

§ 2 – Atividade Lúdica

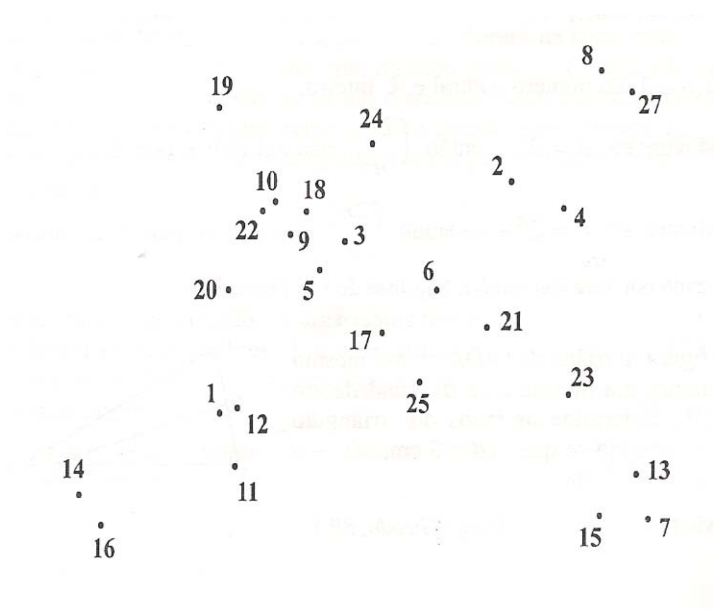
Completem os espaços nas frases seguintes e , à medida que forem achando as respostas, liguem os pontos correspondentes às respostas na folha anexa. No final formará uma figura. Que *figura* é essa?

a. O menor número natural não nulo é ___.
b. O sucessor par do número 13 é ___.
c. O valor da potência 2^4 é ___.
d. O resultado ou quociente de $\frac{121}{11}$ é ___.
e. $\sqrt{625}$ vale ___.
f. O valor da expressão $2^4 - 2^0$ é ___.
g. Um número elevado ao quadrado dá 49; esse número é ___.
h. O valor da expressão $\left(\frac{\sqrt{64}}{2} - 10^0\right) + 10$ é ___.
i. O único número da seqüência: 1, 4, 9, 16, 23, 36 que não é um quadrado perfeito

   é ___.

j. Os números 2, 12, 21, 78, 1890, 1894626 são divisíveis por dois, exceto ___.
k. Um número *n* elevado ao cubo vale 64; o número *n* é ___.
l. O valor da expressão $5^2 + 2$ é ___.
m. O cubo do número 2 vale ___.
n. O número de elementos do conjunto $M = \{x \in N^* / x < 3\}$ é ___.
o. A raiz quadrada do valor da expressão $2^5 + 2(3^3 \div 9 - 1)$ é ___.
p. A metade do valor da expressão $2^4 \div (7 \cdot 3 - 5) + (3^3 + 2^3) \div 7$ é ___.

q. O valor da expressão $5^2 - 1$ é ___.
r. O dobro de $\sqrt{81}$ é ___.
s. Um número escrito na base 2 é 10 011; na base 10 vale ___.
t. O antecessor do número 11 é ___.
u. O dobro do sucessor do número 10 é ___.
v. O valor absoluto do algarismo 9 no número 18809 é ___.
w. O valor relativo do algarismo 2 no número 14620 é ___.
x. Entre os números 14, 17, 16, 5, o único divisível por 5 é ___.
y. O valor da expressão $20 - (6 + 4 - 7)$ é ___.
z. Do número 2000, você subtrai 1280. A seguir, divide o resultado por 5. A raiz quadrada do número que você obteve é igual a ___.



§ 3 – Para refletir

Sendo um professor de matemática, posso me considerar um matemático?

J. Orlando G. Freitas

Universidade da Madeira, Portugal

Um professor de Biologia considera-se um biólogo, o de História um historiador, o de educação Física um desportista... e nós professores de Matemática? Vou relatar uma experiência que me levou a pensar sobre isso.

Durante uma aula do 11º ano, foi necessário calcular a área de um triângulo retângulo. Apesar de ser fácil, muitos alunos não o soube fazer, o que é triste e assustador. Só não fiquei mais admirado porque, tempos atrás, um professor de uma Universidade afirmou num jornal que alguns de seus alunos universitários não conheciam o teorema de Pitágoras...

Coloquei a pergunta: Conhecendo apenas os comprimentos dos lados de um triângulo, é possível saber a sua área? Se o triângulo for retângulo é fácil. Mas, caso não o seja, o que fazer? Foi então que me lembrei de uma fórmula que já tinha visto algures, a relação de Herão (Alexandria séc. I):

$$A_T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

na qual *a*, *b*, *c* são os comprimentos dos lados do triângulo e $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (semi-perímetro).

Qual o interesse dessa fórmula? De fato é de fácil memorização... Antes de usar a fórmula, temos de demonstrá-la, se queremos ter o espírito de um matemático.

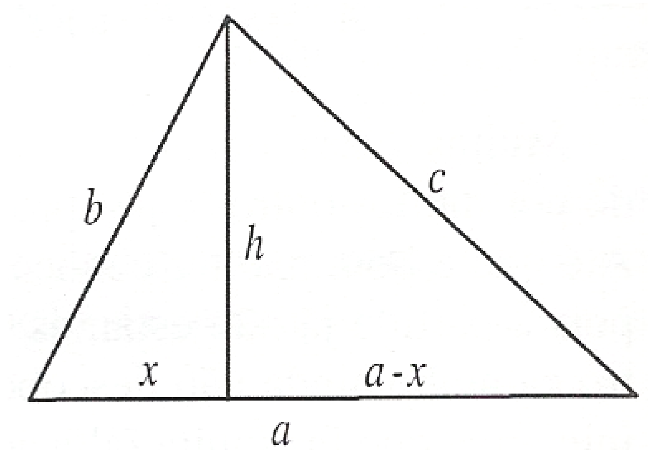
Ao ler uma demonstração, não conseguia entender um dos passos. Como só indicavam bibliografia onde seria possível encontrá-lo demonstrada - essa passagem de fato é um teorema bastante interessante que agora poderá ser demonstrado andando em sentido contrário, depois de provar a relação de Herão -, decidi então demonstrar por mim mesmo à fórmula de Herão. Peguei um lápis e papel (e uma calculadora programável para verificar algumas conjecturas e assim evitar grandes cálculos desnecessários), como fazem os matemáticos, e pus-me a brincar com a álgebra.

Comecei usando o teorema de Pitágoras e cheguei a um resultado. Agora só bastava dar umas mexidelas para aparecer na forma de Herão. Algo que me fascina na Matemática é que grandes resultados podem ser provados usando métodos elementares e muito simples. Vejamos.

Se *a*, *b*, *c* são os comprimentos dos lados de um triângulo, seja *h* a altura relativa ao lado *a* (posso escolher *a* de modo que $a \geq b$ e $a \geq c$).

Aplicando o teorema de Pitágoras aos dois triângulos retângulos obtidos, temos:

$b^2 = x^2 + h^2$ e $c^2 = h^2 + (a-x)^2$.



Então, substituindo na segunda igualdade h^2 por $b^2 - x^2$, obtemos $x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, $\left(a \neq 0\right)$. Substituindo o valor encontrado de *x*, na primeira equação, vem

$$b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = h^2 \text{ ou } h = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}}{2a}.$$

Logo, área do triângulo é $A_T = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{\sqrt{(2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}}{4} =$

$$\frac{\sqrt{\left(2ab - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)}}{4} = \frac{\sqrt{\left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right)}}{4} =$$

$$\sqrt{\frac{(c-(a-b))(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16}} = \sqrt{\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b+c}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2a}{2} \times \frac{a+b+c-2b}{2} \times \frac{a+b+c-2c}{2} \times \frac{a+b+c}{2}} =$$

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}\,.$$

Portando, demonstramos a fórmula de Herão:

$A_T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$, sendo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Muitas vezes, quando se ataca um dado problema, este já foi resolvido por muitos outros e por processos e resultados por nós desconhecidos. Até que é bom não ter conhecido alguns desses processos ou resultados, pois à partida já não estamos " viciados" e poderemos enveredar por outro caminho ainda não descoberto ou talvez mais simples. É esse tipo de iniciativa que faz muita falta aos nossos alunos.

Ao chegar ao fim de uma demonstração, mesmo que já tenha sido demonstrada por outros, podemos nos sentir matemáticos? Penso que sim... Pois é o sentir-se matemático que nos faz gostar desta bela "arte", ou diria mesmo "poesia" ou "música", que é a Matemática. Há quem afirme que todos nós somos matemáticos. Também sou dessa opinião, nem que seja só um bocadinho de matemático. Mas ao fazer (pequenas) demonstrações, como a anterior, por exemplo, sem copiar dos livros, ou quando pegar num problema, tipo problema do mês, conseguimos resolvê-lo com a pouca matemática que temos interiorizado, aí sim, é que podemos nos sentir na pele de um matemático amador. Seria ótimo se nossos alunos assim se sentissem durante as nossas aulas.

Capítulo 1 – Trabalhando com Tangram

*Muitos conhecem o **Tangram**, um quebra-cabeça chinês, de origem milenar. Seu nome original é: Tch´ i Tch´ iao Pan, significa **as sete tábuas da argúcia.*** Ao contrário de outros quebra-cabeças ele é formado por apenas sete peças com formas geométricas resultantes da decomposição de um quadrado, são elas:

- *2 triângulos grandes;*
- *2 triângulos pequenos;*
- *1 triângulo médio;*
- *1 quadrado;*
- *1 paralelogramo*

Com estas peças é possível criar e montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas entre outras. Além de tudo é uma forte ferramenta para aprimorar o raciocínio lógico e a abstração geométrica, iremos agora aprender a construir algumas figuras.

O professor pode iniciar a apresentação deste jogo-material pedagógico contando **uma lenda sobre o Tangram,** assim:Um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciaria uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:
- Com esse espelho você registrará tudo o que vir durante a viagem,
para mostrar-me na volta.
O discípulo surpreso, indagou:
- Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei eu lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?
No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças.
Então o mestre disse:
- Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Com o uso do Tangram o professor pode trabalhar:

- Identificação,
- Comparação,
- Descrição,
- Classificação,
- Desenho de formas geométricas planas,
- Visualização e representação de figuras planas,
- Exploração de transformações geométricas através de decomposição e composição de figuras,

- Compreensão das propriedades das figuras geométricas planas,
- Representação e resolução de problemas usando modelos geométricos
- Noções de áreas
- Frações

Esse trabalho permite o desenvolvimento de algumas habilidades – IMPORTANTES PARA A AQUISIÇÃO DE CONHECIMENTO S EM OUTRAS ÁREAS – tais como:

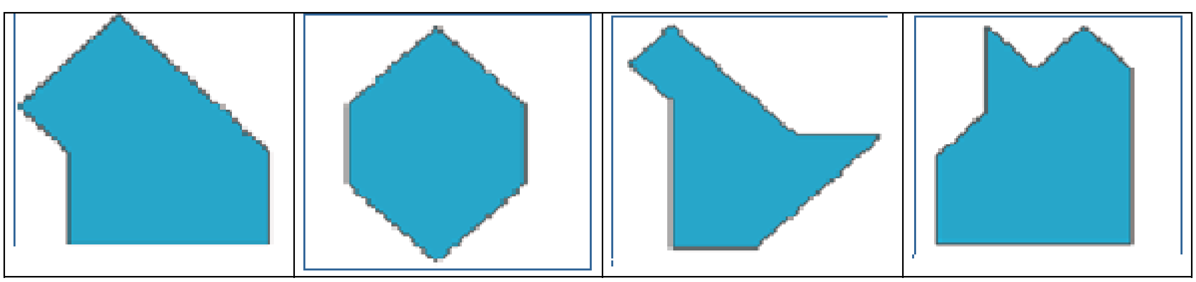
- Visualização / Diferenciação
- Percepção Espacial,
- Análise / Síntese
- Desenho,
- Relação Espacial
- Escrita e Construção

Por último, o professor precisa se conscientizar que este quebra-cabeça tem sido utilizado como material didático nas aulas de Artes e precisa estar cada vez mais presente nas aulas de Matemática. O trabalho com o **Tangram** deve iniciar visando a exploração das peças e a identificação das suas formas.

Logo depois, se passa à sobreposição e construção de figuras dadas a partir de uma silhueta, nesse caso, cabe ao aluno reconhecer e interpretar o que se pede, analisar as possibilidades e tentar a construção. Durante todo esse processo, a criança precisa analisar as propriedades das peças do **Tangram** e da figura que se quer construir, se detendo ora no todo de cada figura, ora nas partes.

Atividade 1

Construa as figuras abaixo:



Algumas Questões

1. Podemos dizer que estas figuras possuem a mesma área que o quadrado original? Por quê?
2. Podemos afirmar algo sobre a simetria destas figuras? O quê?
3. Alguma figura é um polígono? Se sim, é regular?

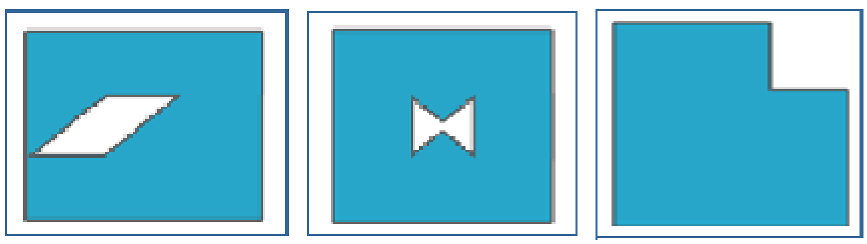
Atividade 2

Construa um Retângulo e um paralelogramo.

Observação: O Retângulo é obtido a partir do paralelogramo e vice-versa.

Atividade 3

Tente construir as figuras abaixo:



Capítulo 2 – Construindo frações Equivalentes

§ 1 – Relações

Definição: Chama-se relação de um conjunto *A* em um conjunto *B* a qualquer subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$.

Exemplo:

$A = \{1,2,3,4\}$
$B = \{2,3,4,5\}$
$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)\}$

e consideremos a expressão *"x < y"*, onde $x \in A$ e $y \in B$.

$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
$\mathcal{R}$ é uma relação de A em B, pois $\mathcal{R} \in A \times B$.

Daremos a seguir as propriedades mais importantes que uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto *A* pode satisfazer.

Definição: Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto *A*. Então dizemos que:

- $\mathcal{R}$ é **reflexiva** se a condição $(\forall x \in A)(x\ \mathcal{R}\ x)$ for verdadeira ,ou seja, se $x \in A$, então $(x, x) \in \mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}$ é **simétrica** se a condição $(\forall x, y \in A)(x\ \mathcal{R}\ y \rightarrow y\ \mathcal{R}\ x)$ for verdadeira, ou seja, para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}$ é **transitiva** se a condição $(\forall x, y, z \in A)(x\ \mathcal{R}\ y$ e $y\ \mathcal{R}\ z \rightarrow x\ \mathcal{R}\ z)$ for verdadeira, ou seja, para todo $x,y,z \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}$ é **anti-simétrica** se a condição $(\forall x, y \in A)(x\ \mathcal{R}\ y$ e $y\ \mathcal{R}\ x \rightarrow x = y)$ for verdadeira,ou seja, se para todo $x,y \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y,x) \in \mathcal{R}$, então $x = y$.

§ 2 – Relações de Equivalência

Definição: Uma relação $\mathcal{R}$ em *A* é dita ser de *equivalência* se for *reflexiva, simétrica e transitiva*.

Exemplo 1

Em $Z \times Z$ a Relação

$$(Z \times Z) \times (Z \times Z)$$
$$((a,b),(c,d)) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a + d = b + c$$

a) ***Reflexiva***

$((a,b),(a,b)) \in \mathcal{R}$, pois $a + b = b + a$

b) Simétrica

$$((a,b),(c,d)) \in \mathcal{R} \Rightarrow a + d = b + c \Rightarrow b + c = a + d \Rightarrow c + b = d + a \Rightarrow ((c,d),(a,b)) \in \mathcal{R}$$

c) ***Transitiva***

$$((a,b),(c,d)) \in \mathcal{R} \text{ e } ((c,d),(e,f)) \in \mathcal{R} \Rightarrow$$
$$\mathrm{a + d = b + c \ e \ c + f = d + e} \Rightarrow b + c = a + d \Rightarrow c + b = d + a \Rightarrow$$
$$\mathrm{a = b + c - d \ e \ f = d + e - c} \Rightarrow \mathrm{a + f = b + e}$$

Portanto $((a,b),(e,f)) \in \mathcal{R}$.

§ 3 – Classes de Equivalência

Definição: Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio *A*.

Para cada $a \in A$, o subconjunto de *A* definido por $[a] = \{ x \in A: x\ \mathcal{R}\ a \}$, é dito ser a classe de equivalência determinada pelo elemento *a* módulo $\mathcal{R}$.
O conjunto das classes de equivalência módulo $\mathcal{R}$, será indicado por $A/\mathcal{R}$ é chamado de conjunto quociente de *A* por $\mathcal{R}$.

Note que se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio *A*, então para todo $a \in A$, temos $a \in [a]$, ou seja, cada classe de equivalência é um subconjunto não vazio de *A*.

Para exemplificarmos, construiremos a seguinte relação de equivalência:

Sejam *B* o conjunto das bananas e $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência tal que duas bananas estão relacionadas se, e somente se elas forem do mesmo tipo. Parece claro e de fato de fácil verificação de que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Podemos construir as *classes* [banana prata], [banana maçã], [banana maçã], [banana terra] e [banana ouro] que representam todas as bananas que existem.

$A/\mathcal{R} = \{[\text{ banana prata}],[\text{ banana maçã}],[\text{banana maçã}],[\text{banana terra}],[\text{banana ouro}]\}$ é o conjunto quociente de A por R.

.

§ 4 – Frações Equivalentes

Em $Z \times Z^*$ definimos a seguinte relação ~ :

$$(m,n) \sim (r,s) \in m.s = n.r$$

Afirmação: A relação ~ é de Equivalência. (Exercício)

Como vimos no parágrafo anterior a relação ~ particiona $Z \times Z^*$ em classes de equivalência.

Para cada par $(m,n) \in Z \times Z^*$ vamos denotar a classe [(a,b)] à qual (m,n) pertence por a/b.

Portanto $m/n = \{(x,y) \in Z \times Z^* / (x,y) \sim (m,n)\} = \{(x,y) \in Z \times Z^* / x.n = y.m\}$

Exemplo 1:

Se m = 1 e n = 2

$$1/2 = \{(x,y)/(x,y) \sim (1,2)\} = \{(x,y)/ 2x = y\} = \{1/2, 2/4, 3/6, \ldots\}$$

Exemplo 2 :

Se m = 3 e n = 4

$$3/4 = \{(x,y)/(x,y) \sim (3,4)\} = \{(x,y)/ 4x = 3y\} = \{3/4, 6/8, 9/12, \ldots\}$$

Observação:

$$m/n = r/s \Leftrightarrow (m,n) \sim (r,s) \in m.s = n.r$$

Ou seja, duas classes são iguais se, e somente se, elas estão relacionadas.

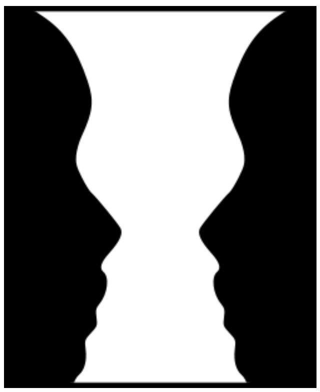
Capítulo 3 – Áreas de Polígonos

§ 1 – Ambigüidade da representação

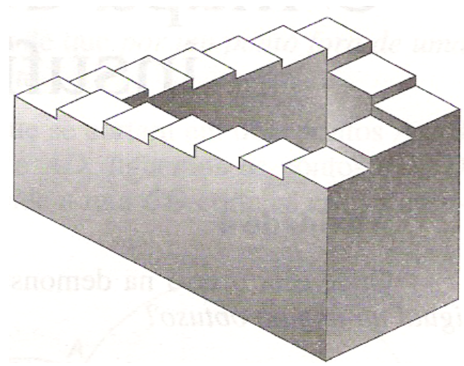
Existe uma grande preocupação com a representação das figuras geométricas, fazer com que o aluno aprenda os conceitos geométricos de modo que se desprenda um pouco das figuras é um dos objetivos do estudo da geometria. Aprender a não confiar tanto nas representações evita a ilusão de óptica e a ambigüidade das representações.

Vejamos alguns desenhos que comprovam este fato:

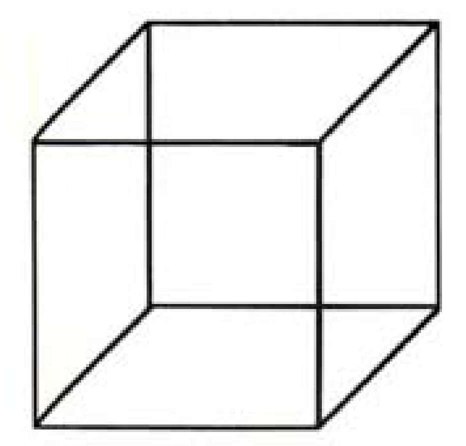
O que você vê?



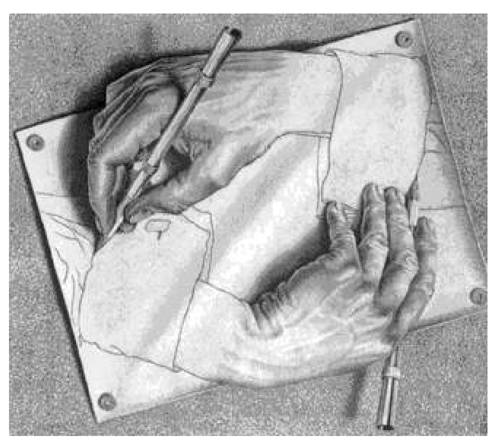
Sobe ou Desce?



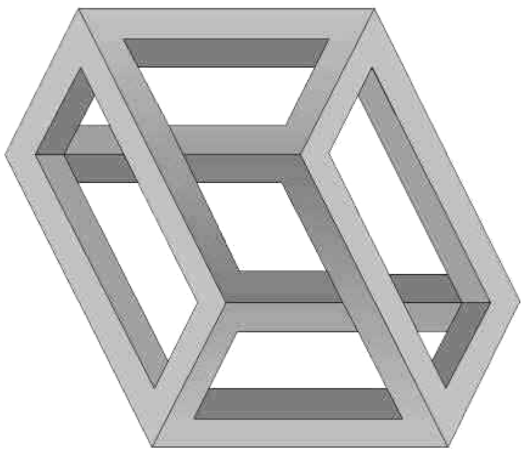
Como está o cubo?



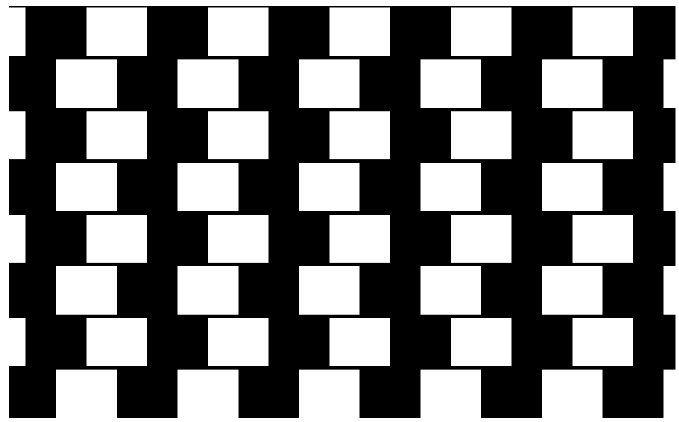
Qual mão escreve?



Isso é um cubo?



Retas Paralelas?



§ 2 – Áreas de polígonos

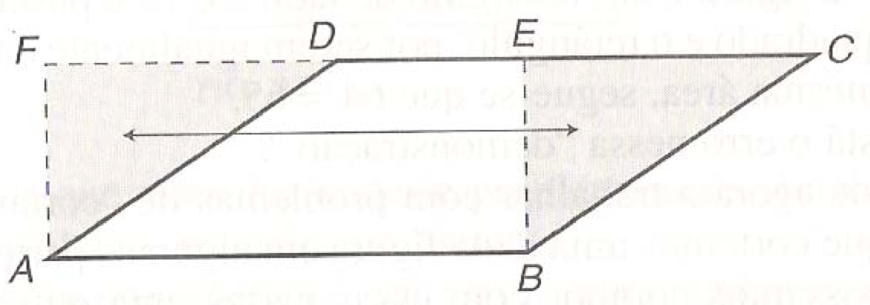
Vejamos agora como funciona a técnica de decomposição e composição na dedução de fórmulas para as áreas de polígonos.

Partimos do fato de que

Área do retângulo = base x altura

Como deduzir a fórmula da área de um paralelogramo utilizando a técnica de cortar e colar?

Você já deve conhecer o uso dessa técnica, na situação indicada pela figura. Você traça uma perpendicular pelo ponto B, determinando o triangulo BCE; aí, você "corta" o triangulo e "cola", isto é, ajusta esse triângulo, no outro lado do paralelogramo.



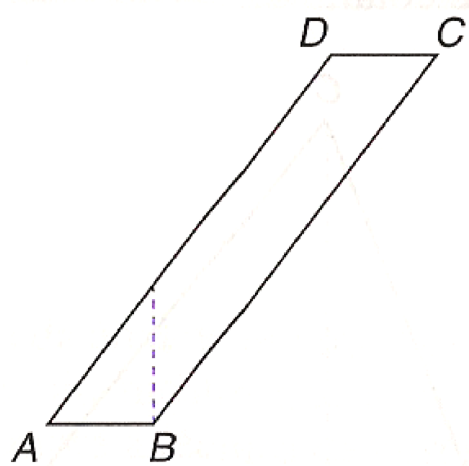
Como o paralelogramo inicial e o retângulo construído têm a mesma base e altura, e como eles têm a mesma área, então:

Área do paralelogramo = base x altura

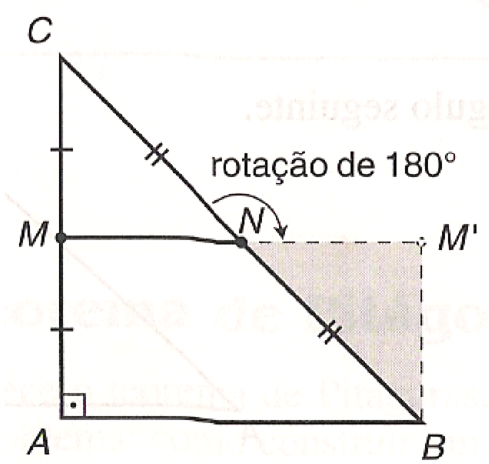
Há uma particularidade no paralelogramo examinado: a perpendicular traçada pelo vértice B intercepta a base superior. A seguir perguntamos o que fazer quando não acontece isso.

Problema *1*

Usando a técnica de cortar e colar, como se faz para deduzir a fórmula da área do paralelogramo ABCD representado abaixo?



Vamos agora deduzir a fórmula da área de um triângulo retângulo. Corte o triângulo na metade da altura, paralelamente à base. Cole o triângulo obtido no trapézio, fazendo uma rotação de 180º ao redor do ponto N.



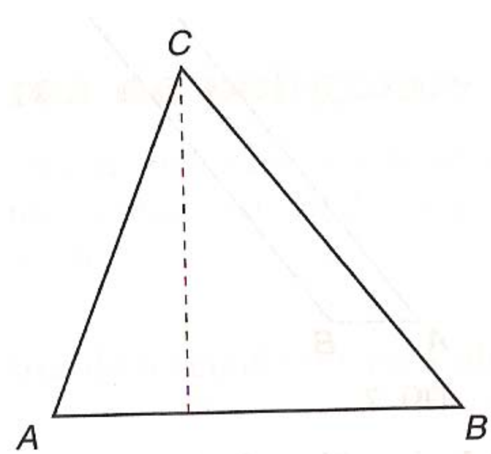
Dessa forma, como o triângulo e o retângulo devem ter a mesma área, por serem igualmente decomponíveis, e a área do retângulo obtido é o produto da metade da altura do triângulo original pela base, segue-se que

$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base x altura}}{2}}$$

Essa fórmula é válida não só para triângulos retângulos mas para todo tipo de triangulo, como você mesmo vai mostrar.

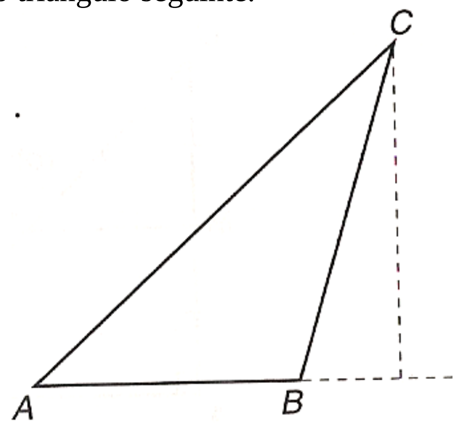
Problema 2

Deduza que a área do triângulo abaixo é igual a $\frac{\text{base x altura}}{2}$, usando a técnica de cortar de colar.



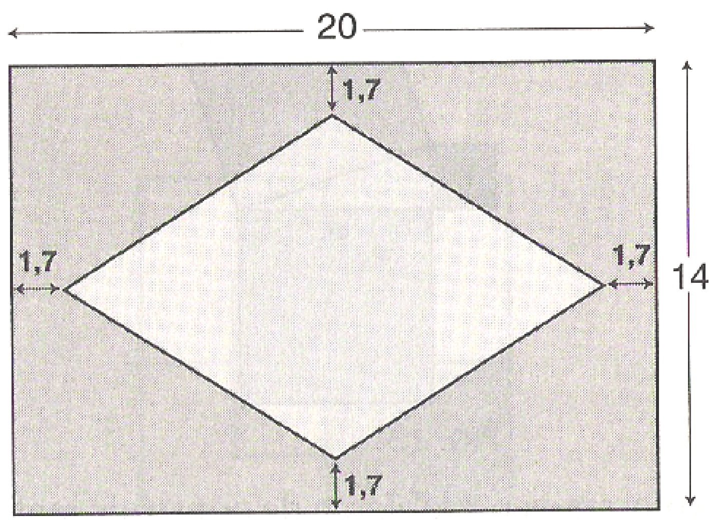
Problema 3

Faça o mesmo para o triângulo seguinte.



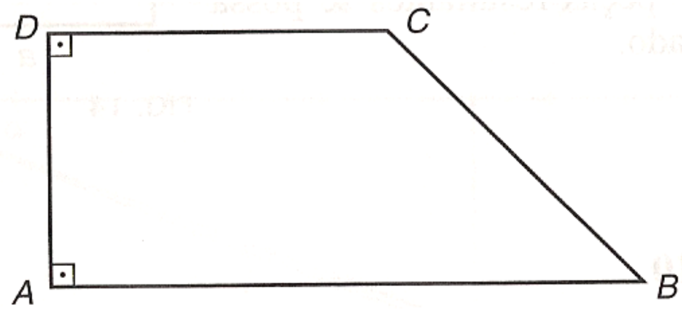
Problema 4

Deduza a fórmula da área do losango em função das diagonais, utilizando a técnica de cortar e colar. Aplique a fórmula obtida para calcular a área do losango que aparece na bandeira nacional.



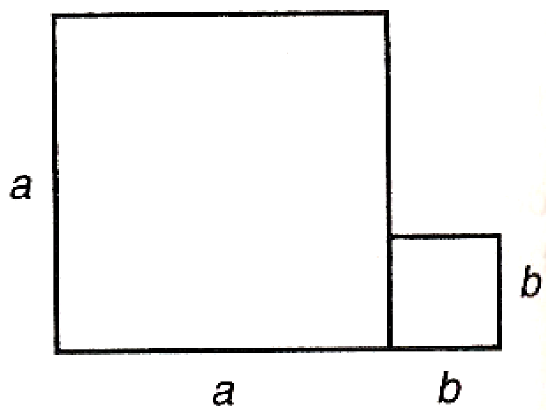
Problema 5

Deduza a fórmula da área de um trapézio retângulo, usando a técnica de cortar e colar. A seguir, mostre que a fórmula vale para um trapézio qualquer, utilizando sempre a técnica de cortar e colar.



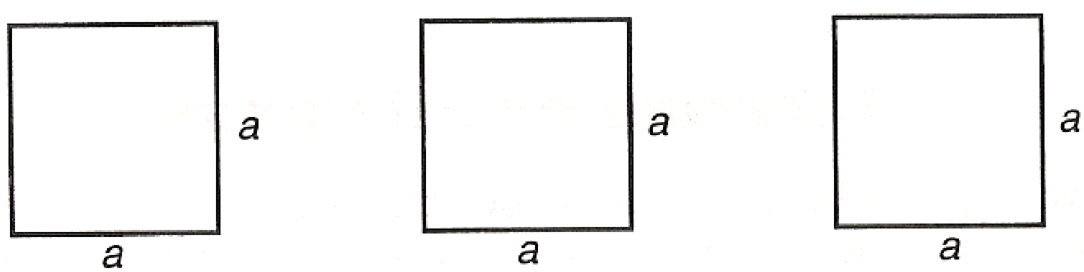
Problema 6

Na figura abaixo aparece um quadrado de lado b colado a um quadrado de lado a . Dê 2 cortes de tesoura nessa figura geométrica de modo com que as peças resultantes se possam compor um quadrado.



Problema 7

Construir um quadrado cuja área seja igual ao triplo da área de um quadrado de lado a , utilizando a técnica de cortar e colar.



Capítulo 4 – Resolvendo Equações com Cartolina

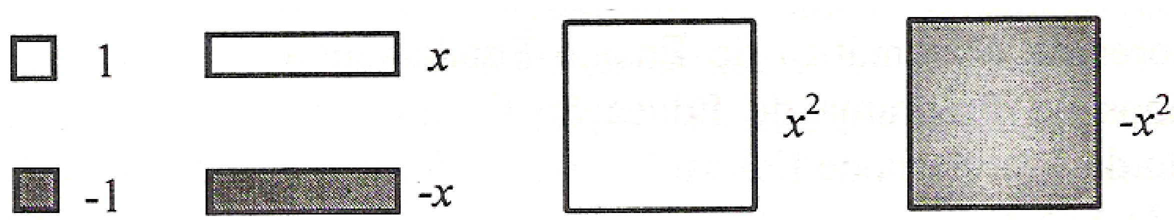
Material utilizado

Um conjunto de fichas de cartolina em duas cores (que representaremos aqui em branco e azul) constituído por:

Quadrados pequenos (1×1) - que representarão à unidade: 1. Os quadrados brancos representarão as unidades positivas e as cinzas às unidades negativas.

Retângulos - com um dos lados com a mesma medida 1 dos quadrados pequenos e o outro com uma medida qualquer, que não seja um múltiplo inteiro da unidade escolhida. Os retângulos brancos corresponderão à incógnita x e os cinzas, ao seu oposto $-x$

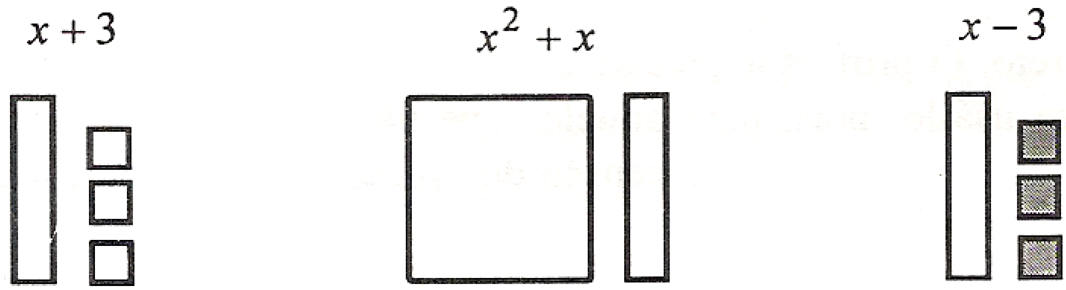
Quadrados Grandes – cujos lados devem ter a mesma medida escolhida para o lado não unitário do retângulo; também em duas cores, o branco representando x e o cinza o seu oposto –x



Para as atividades propostas neste capítulo, é necessário que os alunos dominem as operações com números inteiros, de preferência com representação concreta de modo análogo ao aqui utilizado.

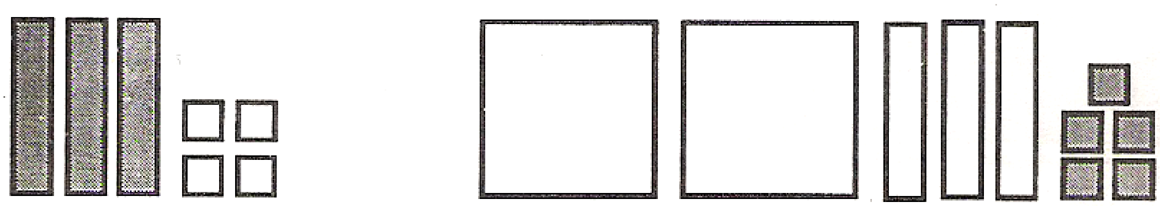
Atividade 1

Trabalharemos inicialmente com a modelagem para expressões algébricas, ou seja , vamos escolher o conjunto de peças que representará cada uma dessas expressões como nos exemplos a seguir.

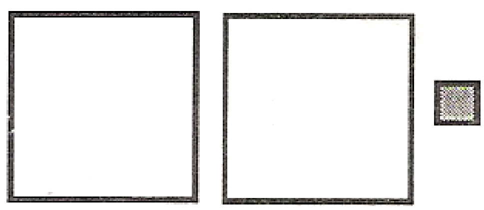


Podemos efetuar adição $(-3x+4)+(2x^2+3x-5)$ observando que as peças de cores diferentes representam quantidades opostas e “se anulam” aos pares.

$-3x+4$ $\qquad$ $2x^2+3x-5$

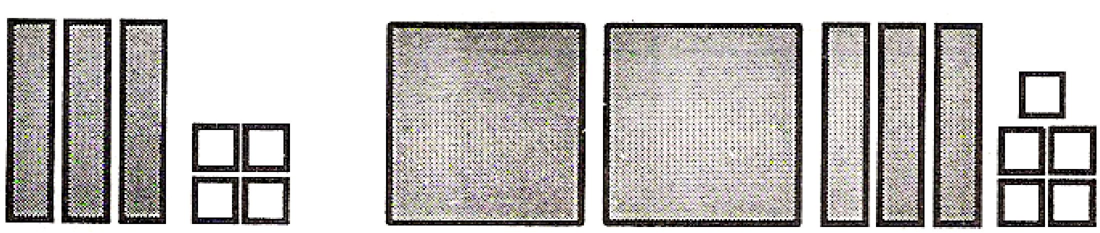


O resultado, portanto, será $2x^2-1$:

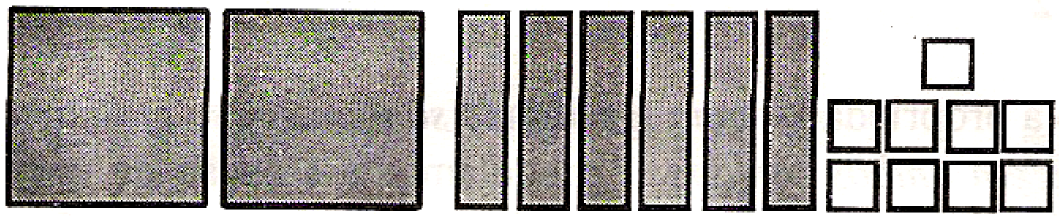


Para efetuar a **diferença** $(-3x+4)-(2x^2+3x-5)$, uma das formas de trabalhar pode ser somando expressão oposta, ou seja, usando que:

$$(-3x+4)-(2x^2+3x-5)=(-3x+4)+(-2x^2-3x+5)$$

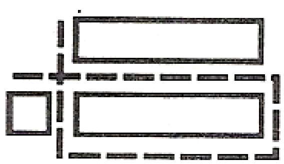


E teremos $(-3x+4)-(2x^2+3x-5)=-2x^2-6x+9$:

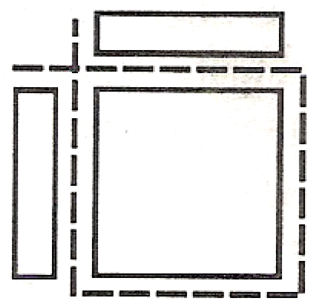


Podemos também modelar as várias possibilidades para o produto, usando as representações:

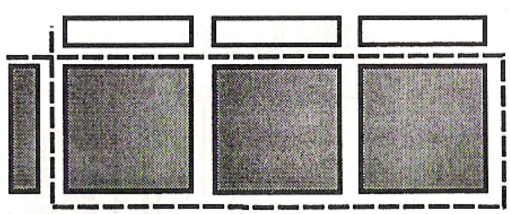
$1\times x = x$



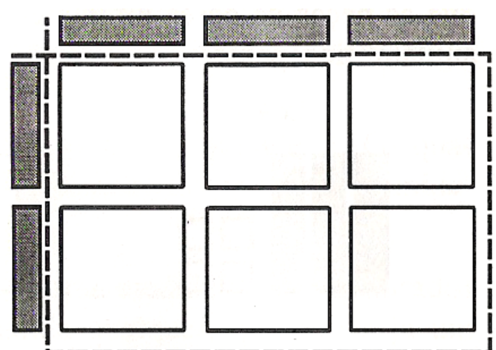
$x\times x = x^2$



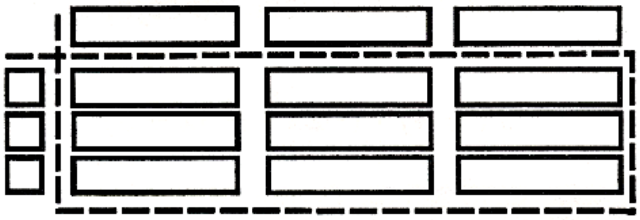
$(-x)\times 3x = -3x^2$



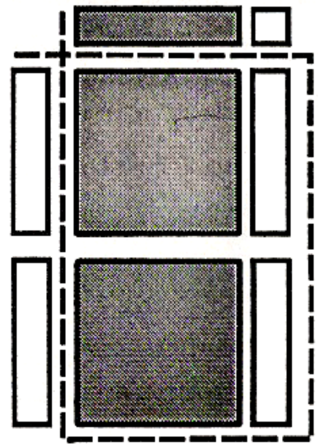
$(-2x)\times(-3x) = 6x^2$



$3 \times 3x = 9x$



$(2x) \times (-x+1) = -2x^2 + 2x$



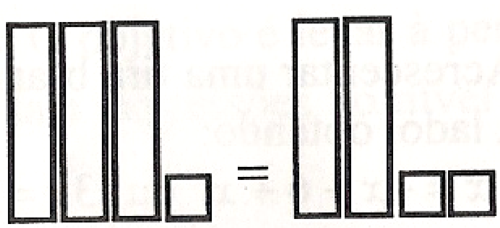
Atividade 2

Usando a propriedade, uma igualdade se mantém se efetuamos operações iguais em ambos os lados, modelamos a solução de uma equação do 1º grau, como nos exemplos a seguir.

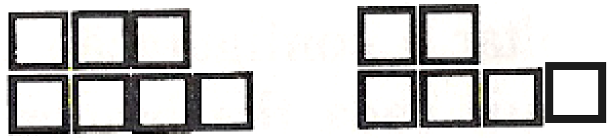
É importante que cada operação efetuada em ambos os lados da igualdade seja acompanhada de sua representação simbólica para que, após muitos exemplos, o estudante participante aprenda as propriedades usadas e se liberte do material concreto, passando a resolver as equações algebricamente.

Exemplo 1

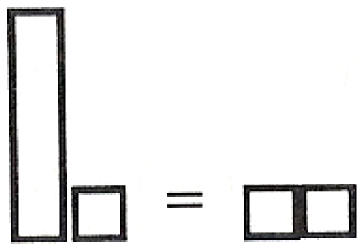
$$3x + 1 = 2x + 2$$



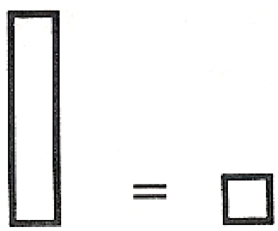
- Substituir cada tira branca por dois quadradinhos brancos e verificar se existe igualdade. A negação significa que $x = 2$ não é solução da equação.



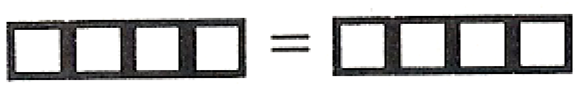
- Voltando à representação original, retirar duas tiras brancas de cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo: $3x+1-2x=2x+2-2x$ ou $x+1=2$.



- Retirar um quadradinho brando de cada lado obtendo $x=1$, que é a solução da equação.

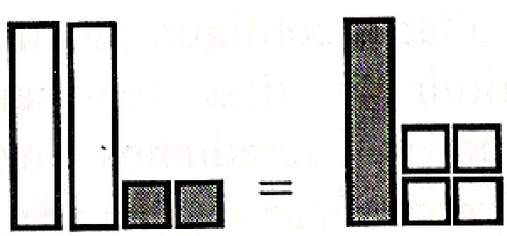


- Voltar à configuração inicial e substituir cada tira branca por um quadradinho branco e verificar a igualdade.

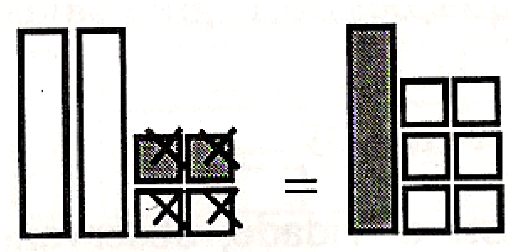


Exemplo 2

$$2x-2=-x+4$$

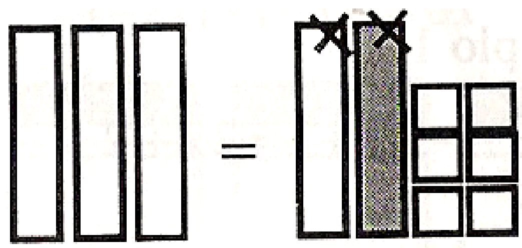


- Acrescentar duas unidades positivas em cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo: $2x-2+2=-x+4+2$ ou $2x=-x+6$.

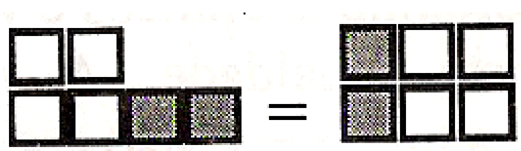


- Acrescentar uma tira branca em cada lado, obtendo:

  $2x+x=-x+6+x$ ou $3x=6$ ou $x=2$.

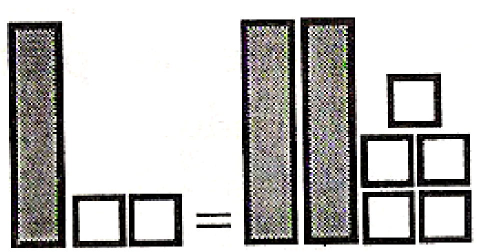


- Voltar à configuração inicial, substituindo cada tira branca (cinza) por dois quadradinhos brancos (cinzas) e verificar a igualdade.



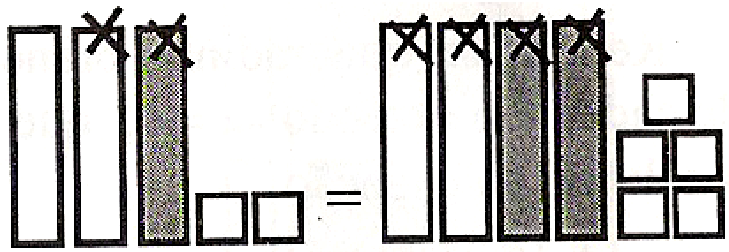
Exemplo 3

$$2-x=5-2x$$

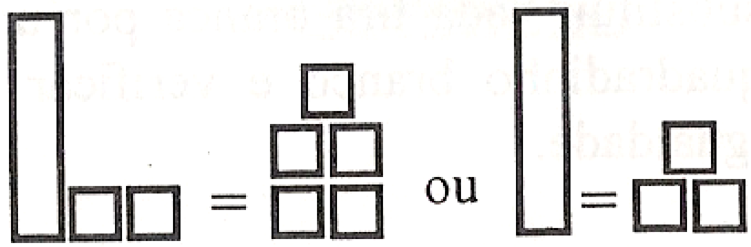


- Acrescentar 2 tiras brancas em cada lado, obtendo:

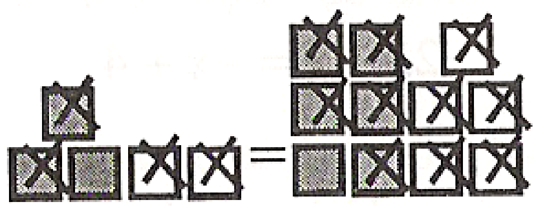
$$2-x+2x=5-2x+2x \text{ ou } 2+x=5$$



- Retirar 2 quadradinhos brancos de cada lado, obtendo:



- Voltar à configuração inicial e substituir as tiras representando $-x$ por 3 quadradinhos cinzas (por quê?) e verificar a igualdade.



Sugerimos ao leitor que resolva, modelando como nos exemplos, outras equações do 1º grau cujas soluções são números inteiros.

Atividade 3

Nesta atividade, observando um modelo físico, os participantes podem investigar a fatoração de um trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, com *a, b* e *c* inteiros cuja decomposição resulta em uma expressão do tipo $(ax+p)(x+q)$, com *p* e *q* inteiros. O objetivo é levar à percepção das propriedades que permitam fatorar tais expressões no nível simbólico.

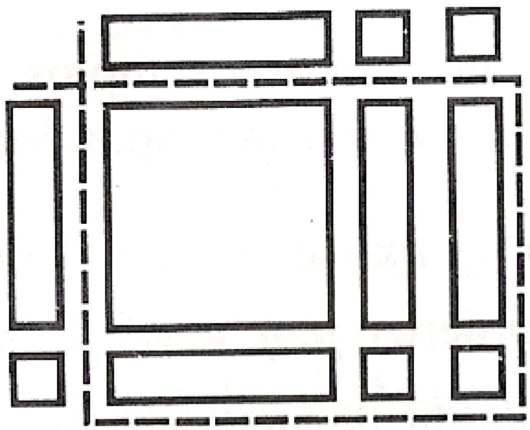
Para realizar a atividade estabelecemos o seguinte:

Um trinômio do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c$*, pode ser fatorado se, e somente se, for possível formar um retângulo com as peças que o representam. As dimensões do retângulo formado representam os fatores do trinômio.*

Dessa forma, voltamos à estrutura do produto modelado nos exemplos 1,2 e 3 da *Atividade 1.*

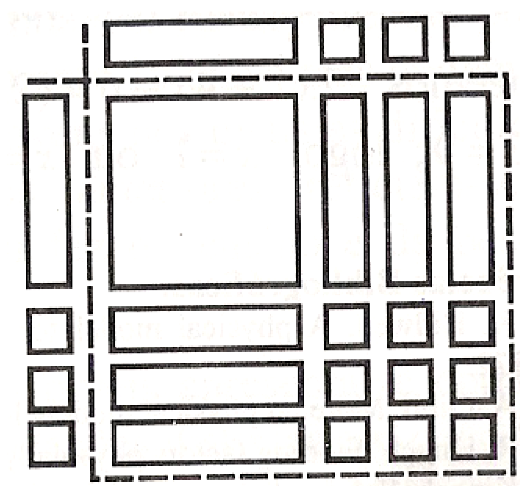
Por exemplo, os fatores de $x^2 + 3x + 2$ podem ser encontrados construindo-se um retângulo com uma peça que representa x^2, três peças que representam x e duas peças que representam as unidades positivas.

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

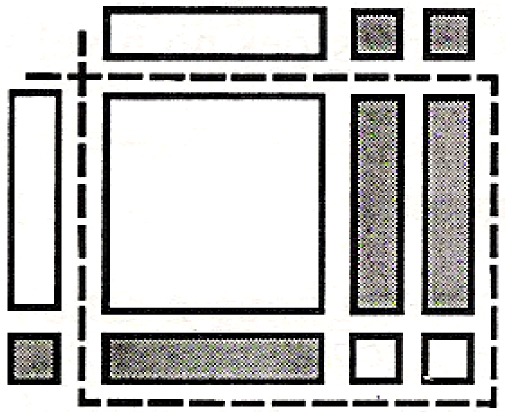


Vejamos mais alguns exemplos.

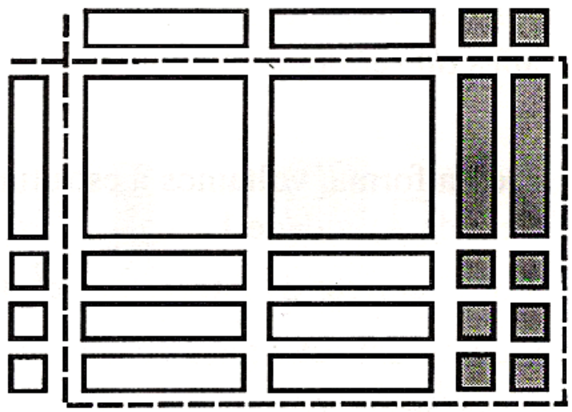
1. O trinômio $x^2 + 6x + 9$ pode ser fatorando construindo-se o quadrado ao lado. Observe que os trinômios quadrados perfeitos podem sempre ser representados por peças que formam um quadrado. Logo, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$



2. O trinômio $x^2 - 3x + 2$ pode ser fatorado construindo-se o retângulo:



Logo, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$



3. $2x^2 + 4x - 6 = (2x-2)(x+3)$

Neste exemplo, usamos, para formar o retângulo, a convenção de que peças de cores diferentes se “anulam”: $4x$ foi representado por $6x + (-2x)$.

Depois de muitos exemplos, os alunos que participarem desta atividade devem estar aptos para responder à questão:

Se $ax^2 + bx + c = (ax + p)(x + q)$, quais a relações que existem entre os números *p*,*q* e *b*?

Em Seguida devem usar essas relações para fatorar algebricamente outros trinômios e estarão prontos para resolver equações do segundo grau usando a fatoração para recair em equações do primeiro grau.

Por exemplo, para resolver a equação $2x^2 + 4x - 6$ (exemplo 3) fazemos $2x^2 + 4x - 6 = (2x-2)(x+3) = 0$ e então $2x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$, logo $x = 1$ ou $x = 3$.

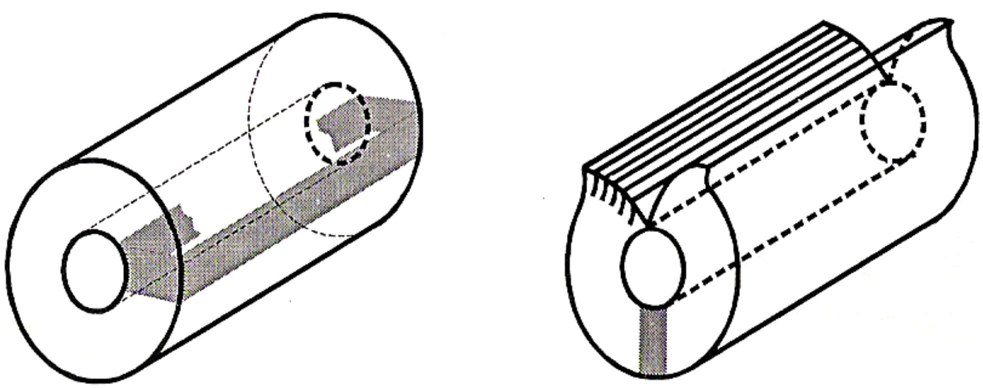
Capítulo 5 – Área do Círculo

Introdução

O Material necessário para a aplicação consiste em um rolo de papel (papel toalha ou papel higiênico), uma tesoura ou um estilete e um pedaço de fita adesiva. Dividimos o processo em três etapas.

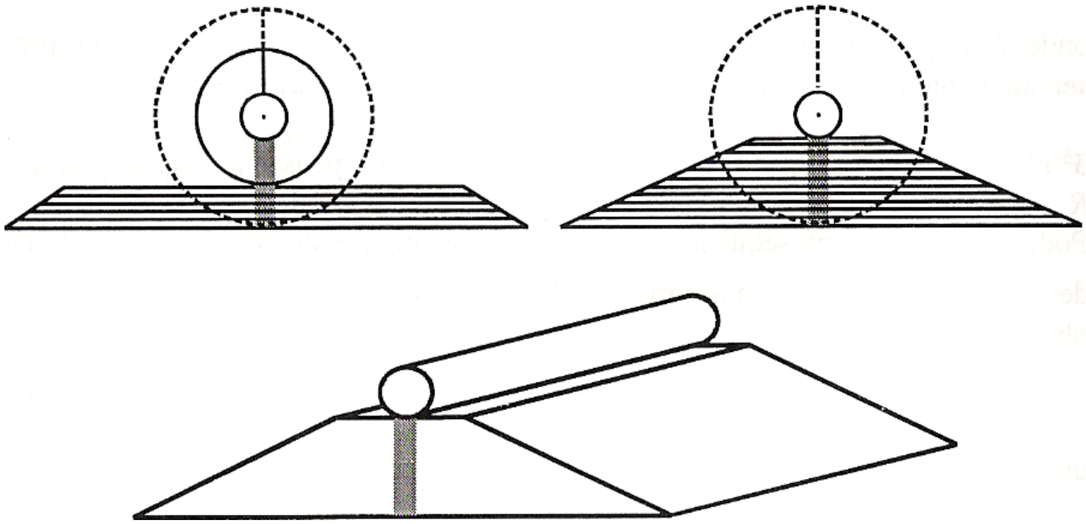
Transformação de uma coroa em um trapézio

Tome um rolo de papel e passe a fita adesiva, como na figura. Em seguida, com uma tesoura afiada, corte folha por folha (ou grupos com poucas) em linha reta como ilustrado na figura abaixo.



Descasque o rolo até chegar ao cilindro de papelão duro, localizado no centro. Não corte esse papelão, pois ele servirá para moldar o rolo quando da sua reconstituição.

Agora, com todas as folhas cortadas, você poderá mostrar à sua classe como a coroa circular se transforma num trapézio. Ilustramos com a seqüência de figuras abaixo:



A primeira figura representa o rolo de papel com parte de suas folhas cortadas, apoiadas sobre a superfície da mesa. Nas outras figuras representamos o trapézio (e o prisma) obtido.

Em Seguida você pode mostrar o processo inverso: a transformação do trapézio numa coroa circular, retornando o rolo à sua forma original. Podemos, com isso, "convencer" o aluno de que a área de uma coroa circular pode ser determinada calculando-se a área de um trapézio.

Cálculo da Área da Coroa Circular

Calculemos a área da coroa. Sejam r o raio da circunferência interna e R o raio da externa. Voltando-se ao processo físico da transformação da coroa no trapézio, observa-se que a base maior do trapézio, obtida com a folha externa do rolo, tem comprimento $2\pi R$ e a base menor, obtida com a folha interna do rolo, tem comprimento $2\pi r$. A altura do trapézio é $R-r$. Assim, a área do trapézio ou, equivalentemente, da coroa será:

$$A = \frac{1}{2}(R-r)(2\pi R + 2\pi r) = \frac{2\pi}{2}(R-r)(R+r) = \pi(R^2 - r^2)\,.$$

Observe que $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi R^2 - \pi r^2$ deve ser a diferença entre as áreas dos círculos, mas isso deve ser comprovado de fato na próxima etapa.

Trabalhando com limite

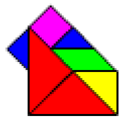
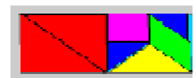
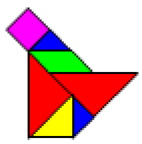
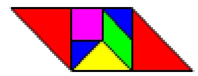
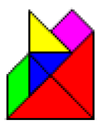
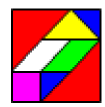
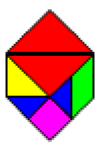
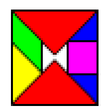
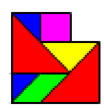
Nessa última etapa devemos levar o aluno a pensar no círculo de raio R como sendo a figura obtida da coroa diminuindo-se o raio interno r até zero. Pode-se pensar numa seqüência de valores para r, que decresça e se aproxime de zero. As áreas das coroas correspondentes serão dadas por $A = \pi R^2 - \pi r^2$ e observamos que:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} \pi R^2 - \pi 0^2 = \pi R^2 .$$

Assim confirmamos que a área do círculo de raio R é dada por πR^2. Como em todo método de dedução dessa fórmula, não podemos evitar o uso do conceito de limite.

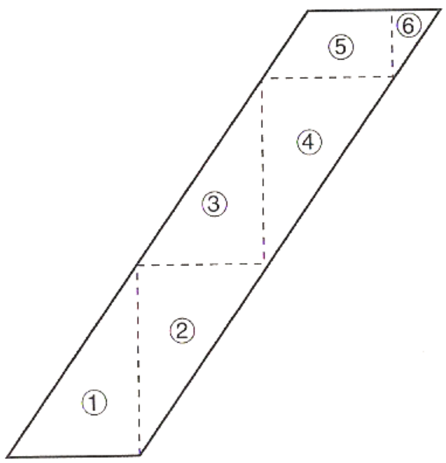
Respostas

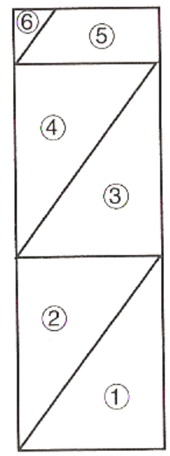
Cap. 1

Tangram 1 	Tangram 5 
Tangram 2 	Tangram 6 
Tangram 3 	Tangram 7 
Tangram 4 	Tangram 8 
	Tangram 9 

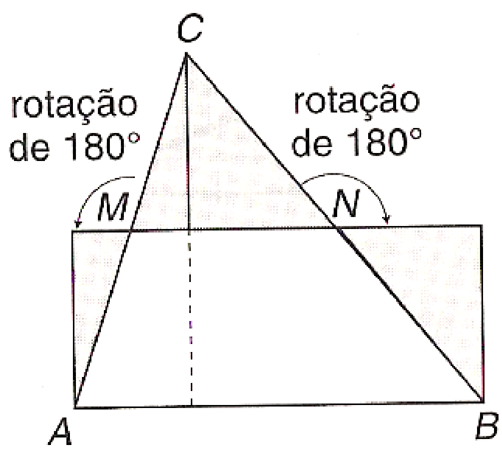
Cap. 3.2

Problema 1

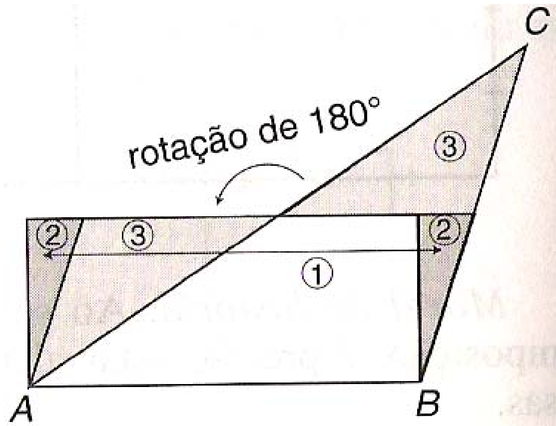




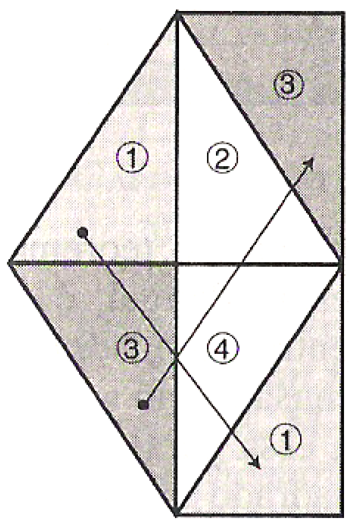
Problema 2



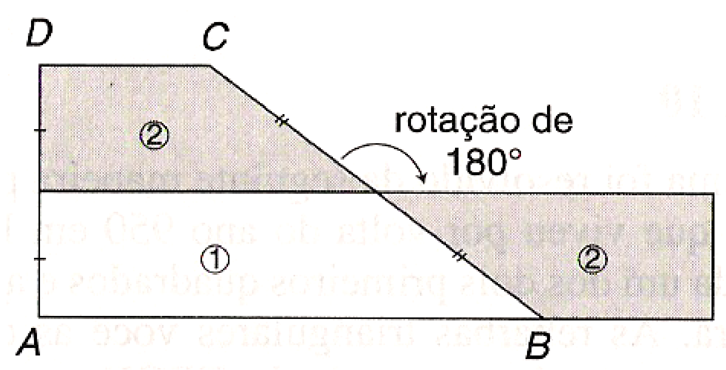
Problema 3



Problema 4

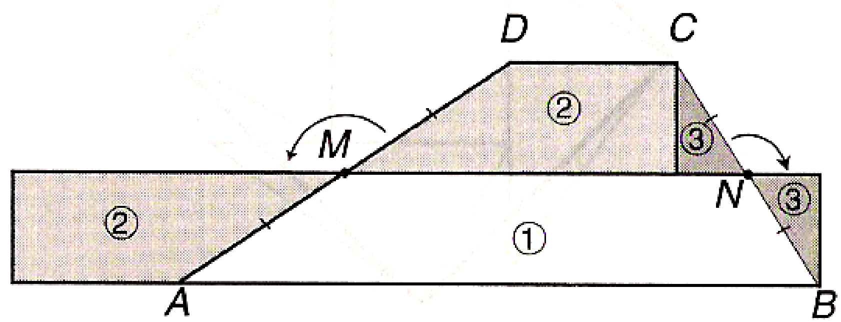


Problema 5



$$\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \text{ x altura}}{2}$$

A fórmula continua válida no caso mais geral, como se mostra na figura seguinte.



Referências Bibliográficas

Dias, I., Godoy, S.M.S. – SMA-341 – Elementos de Matemática, 2006.

Lipschutz, S. – Topologia Geral, 1971.

Machado, N.J. – Atividades de Geometria, 1996.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 31, 1996.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 33, 1997.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 36, 1998.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 38, 1998.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 40, 1999.

S.B.M. – Revista do Professor de Matemática, 44, 2000.